פתרון מבחן מועד א' – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 14/02/21

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^5(2x)\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+3x^3)(\cos^2(x)-1)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^5(2x)\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+3x^3)\left(\cos^2(x)-1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^5\cdot\frac{3x^3}{\ln(1+3x^3)}\cdot\frac{x^2}{\cos(x)-1}\cdot\frac{1}{\cos(x)+1}\cdot\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)\cdot\frac{2^5}{3}=$$

$$=1^5\cdot 1\cdot(-2)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2^5}{3}=-\frac{16}{3}\pi$$

ב. $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-2}=4$$

ג. $\lim_{n\to\infty} n\cdot ln\left(\frac{n+2}{n-3}\right)$

$$n\cdot\ln\left(\frac{n+2}{n-3}\right)=\ln\left(\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n\right)$$

כיוון ש

$$\frac{n+2}{n-3}=\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{n}}\to 1$$

לפי כלל הe

$$\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n\to e^{n\cdot\left(\frac{n+2}{n-3}-1\right)}=e^{\frac{5n}{n-3}}\to e^5$$

לכן סה"כ

$$n \cdot \ln\left(\frac{n+2}{n-3}\right) = \ln\left(\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n\right) \to \ln(e^5) = 5$$

.2

א. חשבו את $\int \frac{8x^2-2x+4}{(x-1)(x^2+2x+2)} dx$.

$$\frac{8x^2-2x+4}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{2}{x-1} + \frac{6x}{x^2+2x+2} = \frac{2}{x-1} + 3 \cdot \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{6}{x^2+2x+2}$$

$$\int \frac{2}{x-1} dx = 2\ln|x-1|$$

$$\int 3 \cdot \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx = 3\ln\left(x^2+2x+2\right)$$

$$\int \frac{6}{x^2+2x+2} dx = 6\int \frac{1}{(x+1)^2+1} dx = 6\arctan\left(x+1\right)$$

סה"כ

$$\int \frac{8x^2-2x+4}{(x-1)(x^2+2x+2)} dx = 2\ln|x-1| + 3\ln(x^2+2x+2) - 6\arctan(x+1) + C$$

ב. קבעו אם האינטגרל הבא מתכנס או לא $\int_1^\infty \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx$.

כיוון ש

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1$$

האינטגרל החיובי בשאלה חבר של $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ ולכן גם הוא מתבדר.

3. לכל ערך של הפרמטר $a \in \mathbb{R}$ מצאו כמה פתרונות ישנם למשוואה $x(x^3-10)^3 = a$, והוכיחו תשובתכם.

נעביר כמובן אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = x(x^3-10)^3 - a$$

ואנחנו רוצים לדעת כמה שורשים יש לפונקציה h.

ראשית, נגזור:

$$h'(x) = (x^3-10)^3 + x\cdot 3(x^3-10)^2\cdot 3x^2 = (x^3-10)^2(x^3-10+9x^3) = 10(x^3-10)^2(x^3-1)$$

קל לראות כי כאשר $x \geq 1$ מתקיים כי $h'(x) \geq 0$ וכי עבור $x \leq 1$ מתקיים כי $h'(x) \leq 0$ (והנגזרת מתאפסת פעמיים בלבד).

לכן לכל $x > 1$ מתקיים כי $h(x) > h(1)$ וכן לכל $x < 1$ מתקיים כי $h(x) > h(1)$

כעת נציב ונראה כי $h(1) = -9^3 - a$

אם $h(1) > 0$ כלומר $a < -9^3$ אז לכל x מתקיים כי $h(x) \geq h(1) > 0$ ולכן הפונקציה אינה חותכת את ציר האיקס ולמשוואה אין פתרונות כלל.

אם $h(1) = 0$ כלומר $a = -9^3$ הפונקציה חותכת את הציר בנקודה זו בלבד (בנקודות האחרות ערכה גבוה יותר) ולכן למשוואה יש בדיוק פתרון אחת.

עבור $h(1) < 0$ כלומר $a > -9^3$ נוכיח כי לפונקציה h יש בדיוק שני שורשים, ולכן למשוואה יש בדיוק שני פתרונות.

ראשית, בתחום העלייה יש לכל היותר פתרון יחיד וכך גם בתחום הירידה.

כעת, כיוון ש $\lim_{x\to\pm\infty} x(x^3-10)^3 - a = \infty$ נובע כי יש נקודה $x > 1$ בה $h(x) > 0$ וכן נקודה $x < 1$ בה $h(x) > 0$.

לכן לפי משפט ערך הביניים, כיוון ש $h(1) < 0$ הפונקציה חותכת את הציר בקטע $(1,\infty)$ וכן בקטע $(-\infty, 1)$ וסה"כ יש למשוואה בדיוק שני פתרונות.

4. תהי f פונקציה המקיימת $f(x) = f(x+1)$ לכל $x \in [0,\infty)$.
   א. הוכיחו/הפריכו: קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x \in [0,\infty)$ מתקיים כי $f(x) < M$.

הפרכה:

לפי הנתון הפונקציה מחזורית עם מחזור 1.

נביט בפונקציה המקיימת לכל $x \in (0,1)$ ולכל $k \in \mathbb{N}$ כי

$$f(x+k) = \frac{1}{x}$$

וכן

$$f(k) = 0$$

כיוון ש $f(x)=\frac{1}{x}$ עבור $x\in(0,1)$ וכיוון ש $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=\infty$ לא ייתכן שהפונקציה חסומה מלעיל (הרי אם היה קיים M כזה הגבול היה קטן או שווה ממנו).

ב. נתון בנוסף כי f רציפה בתחום $[0,\infty)$, הוכיחו/הפריכו: f גזירה בכל $x\in(0,\infty)$.

נגדיר באופן דומה פונקציה עם מחזור 1, לכל $x\in[0,1)$ ולכל $k\in\mathbb{N}$ ע"י

$$f(x+k)=g(x)$$

כאשר

$$g(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le\frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2}<x<1 \end{cases}$$

ניתן לוודא שפונקציה זו אינה גזירה בנקודה $x=\frac{1}{2}$ אך רציפה בכל הממשיים.

5. תהי סדרה המקיימת $a_{n+1}=a_n-a_n^2$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

א. מצאו את גבול הסדרה אם נתון כי $0<a_1<1$.

כיוון ש $a_{n+1}-a_n=-a_n^2\le0$ הסדרה מונוטונית יורדת.

נוכיח באינדוקציה כי לכל n מתקיים כי $0<a_n<1$ ולכן הסדרה מונוטונית וחסומה ומתכנסת לגבול סופי.

כמובן שהטענה נכונה עבור a_1 יהי n עבורו $0<a_n<1$ אזי

$$0<a_n-a_n^2=a_n(1-a_n)<1$$

כיוון שמכפלת חיוביים קטנים מאחד היא מספר חיובי קטן מאחד.

לכן קיים גבול סופי L כך ש $a_n\to L$ ולכן $a_{n+1}\to L$.

נשאיף את שני צידי נוסחאת הנסיגה $a_{n+1}=a_n-a_n^2$ ונקבל

$$L=L-L^2$$

ולכן $L=0$ כלומר הוכחנו כי הסדרה מתכנסת למספר סופי, והמספר הזה חייב להיות אפס.

ב. מצאו את גבול הסדרה אם נתון כי $a_1>1$.

כיוון ש $a_{n+1}-a_n=-a_n^2\le0$ הסדרה מונוטונית יורדת.

כמו כן, $a_2=a_1-a_1^2=a_1(1-a_1)<0$ כיוון $a_1>1$

כלומר האיבר השני שלילי, וכיוון שהסדרה יורדת אם יש לה גבול סופי הוא חייב להיות קטן או שווה מa_2.

אך ראינו בסעיף קודם שאם יש גבול סופי הוא חייב להיות אפס, ומכאן שלא קיים לסדרה גבול סופי.

כיוון שהסדרה מונוטונית יורדת ואינה מתכנסת לגבול סופי, נובע כי $a_n \to -\infty$

.6

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{k}{n^3}}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{1}{n^2}\left(1 + \frac{k}{n}\right)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \sqrt{1 + \frac{k}{n}} \to \int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$$

המעבר האחרון נכון כיוון שהפונקציה $\sqrt{1+x}$ רציפה בקטע $[0,1]$ ולפי המשפט שלמדנו על סכומי רימן.

$$\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx = \int_0^1 (1+x)^{\frac{1}{2}}dx = \left[\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}$$

ב. קרבו את $\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{5}$.

ראשית נשים לב כי

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \ln\left(2^{-\frac{1}{3}}\right) = -\frac{1}{3}\ln(2)$$

נעזר בפונקציה $f(x) = -\frac{1}{3}\ln(1+x)$ כאשר הנקודה המצוייה היא $a = 0$ והנקודה הרצוייה היא $x = 1$

עבור $n = 1$ נקבל שקיימת נקודה $0 < c < 1$ כך שהשארית בקירוב טיילור היא

$$R_1 = \frac{f''(c)}{2}(1-0)^2 = \frac{1}{6(1+c)^2} < \frac{1}{6}$$

ולכן מספיק קירוב זה, ולכן הקירוב הוא

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = f(1) \approx f(0) + f'(0)(1-0) = 0 - \frac{1}{3}$$