משפטי האיזומורפיזם

משפט האיז׳ הI

תהיינה G, L חבורות. $\varphi : G \to L$ הומ׳. אזי φ $\mathrm{G}/_{\ker\varphi} \cong \mathrm{Im}\,\varphi$.

ניסוח שקול

הגדרה

$\varphi : G \to L$ אפימורפיזם אם הוא הומ׳ על

משפט האיז׳ הI

תהיינה G, L חבורות. $\varphi : G \to L$ אפימורפיזם. אזי $\mathrm{G}/_{\ker\varphi} \cong L$

תרגיל

להוכיח את השקילות של שני הניסוחים.

הקדמה למשפט האיז׳ הIII

עובדה 1

נניח $G \trianglelefteq N$ ו$N \leq H \leq G$, אזי $N \trianglelefteq H$

הוכחה קלה

$$N \trianglelefteq H \Leftrightarrow \forall_{g\in H} gN = Ng \Leftarrow \forall_{g\in G} gN = Ng \Leftrightarrow N \trianglelefteq G \quad \blacksquare$$

עובדה 2

אם $K \leq H \leq G$ אז $K \leq G$

הוכחה

מידי מההגדרות.

עובדה 3

אם $N \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ לא בהכרח $N \trianglelefteq G$

הוכחה - דוגמה נגדית

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \{-1, 1\} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y_1 \\ y_2 & 0 \end{pmatrix} : y_1 y_2 \in \{-1, +1\} \right\}$$

G חבורה מסדר 8.

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \{-1, 1\} \right\}$$

H חבורה מסדר 4

$$N=\left\{\begin{pmatrix}x_1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} : x_1,x_2\in\{-1,1\}\right\}$$

N חבורה מסדר 2.

ברור ש$N \le H \le G$. יתר על כן:

תרגיל חובה: אם $H \le G$ מאינדקס 2, ז.א. $[G:H]=2$, אזי $H \trianglelefteq G$

מסקנה: במקרה שלנו $N \trianglelefteq H \trianglelefteq G$ אבל N אינה תח"נ של G כי

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}N=\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

מאידך

$$N\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right\}$$

■

משפט האיז' הIII

תהא G חבורה. $N \le K \trianglelefteq G$, $N \trianglelefteq G$.

אז:

(i) $K/N \trianglelefteq G/N$

ומתקיים: (ii) $G/N\big/K/N$

הערה

לפי עובדה 1 אם $N \le K$, $N \trianglelefteq G$, $K \le G$ אז $N \trianglelefteq K$ ולכן K/N קיימת.

הוכחה

נגדיר העתקה $\varphi : G/N \to G/K$ ע"י $\varphi(gN)=gK$. נוכיח: φ מוגדרת היטב, על, הומ'.

מוגדרת: צ"ל אם $g_1N=g_2N$ אזי $\varphi(g_1N)=\varphi(g_2N)$. אכן, $g_1N=g_2N \Leftrightarrow g_2^{-1}g_1\in N \Rightarrow g_2^{-1}g_1\in K \Leftrightarrow g_1K=g_2K \Leftrightarrow \varphi(g_1N)=\varphi(g_2N)$.

על: לכל איבר $x\in G/K$ קיים $g\in G$ כך ש$x=gK$ ואז $x=gK=\varphi(gN)$.

הומ': לכל שני איברים $x_1,x_2\in G/N$ קיימים $g_1,g_2\in G$ כך ש$x_1=g_1N, x_2=g_2N$ ואז

$$\varphi(x_1)\varphi(x_2)=\varphi(g_1N)\varphi(g_2N)=g_1Kg_2K=g_1g_2K=\varphi(g_1g_2N)=\varphi(g_1Ng_2N)=\varphi(x_1,x_@)$$

מסקנה (לפי משפט האיז' הI): $G/N\big/\ker\varphi \cong G/K$ (*).

נחשב את $\ker\varphi$:

$$\ker\varphi=\left\{x\in{}^{G}/_{N}:\varphi\left(x\right)=e_{{}^{G}/_{K}}\right\}=\left\{gN:g\in G,\varphi\left(gN\right)=eK\right\}=\left\{gN:g\in G,gK=K\right\}$$

$$=\left\{gN:g\in G,g\in K\right\}=\left\{gN:g\in K\right\}={}^{K}/_{N}$$

מכיוון שהגרעין תח"נ (i) נכון, וע"י הצבת $\ker\varphi={}^{K}/_{N}$ ב(*), נקבל את משפט האיז' השלישי.

דוגמה

$$G=\mathbb{Z},K=5\mathbb{Z},N=10\mathbb{Z}$$

מתקיים ${}^{G}/_{K}\cong{}^{{}^{G}/_{N}}/_{{}^{K}/_{N}}$

$${}^{{}^{\mathbb{Z}}/_{10\mathbb{Z}}}/_{{}^{5\mathbb{Z}}/_{10\mathbb{Z}}}\cong{}^{\mathbb{Z}_{10}}/_{\{0,5\}}\cong\mathbb{Z}_5\cong{}^{\mathbb{Z}}/_{5\mathbb{Z}}$$

הוכחנו

כל גרעין תח"נ.

טענה

ההפכך ג"כ נכון: כל תח"נ היא גרעין של איזשהו הומ'.

הוכחה

תהא $N\trianglelefteq G$. נגדיר העתקה $\varphi:G\to{}^{G}/_{N}$ ע"י $\varphi\left(g\right)=gN$. φ הומ' כי $\forall g_1,g_2\in G$

$$\varphi\left(g_1g_2\right)=g_1g_2N=g_1Ng_2N=\varphi\left(g_1\right)\varphi\left(g_2\right)$$

$$\ker\varphi=\left\{g\in G:\varphi\left(g\right)=e_{{}^{G}/_{N}}\right\}=\left\{g\in G:gN=N\right\}=\left\{g\in G:g\in N\right\}=N$$

זה נקרא גם ההומומורפיזם הקנוני:

הגדרה

בהנתן $N\trianglelefteq G$, ההומומורפיזם הקנוני מG ל${}^{G}/_{N}$ הוא ההעתקה $\pi:G\to{}^{G}/_{N}$ המוגדרת ע"י $\forall_{g\in G}\pi\left(g\right)=gN$

הערה

π אפימורפיזם.