מקליד: עידן אריה
מרצה: פרופ' דוד סרנה
תאריך: 2015-11-22

קבלת החלטות בסביבה דינמית משתנה
89-514-01

חלוקה הוגנת(Fair Division)

חלוקה הוגנת היא קלה כאשר יש סימטריה מלאה - לכל השחקנים יש אותה פונקציית ערך. היא יותר קשה כאשר יש פונקציות ערך שונות לשחקנים שונים(למשל בחלוקת פיצה - כל אחד מעדיף תוספת שונה)
חלוקה הוגנת היא לא בהכרח envy-free

הגדרה

משחק מסוג fair-division מורכב מ:

- קבוצת המשאבים לחלוקה - S
  - יכול להיות מוחשי(למשל פיצה) או לא מוחשי(למשל זכיונות)
  - בעלי ערך חיובי או שלילי(למשל בחלוקת עבודה לעבודה יש ערך שלילי)
- קבוצת שחקנים $P_1, \dots P_n$
  - עליהם מוטלת המטלה לחלק!
- ערך משאב לכל שחקן(פונקציית ערך)

הנחות על השחקנים

- כל שחקן מסוגל להעריך את השווי של S **עבור עצמו** וכל חלק אפשר שלו
- שיתוף פעולה - השחקנים מסכימים להשתתף במשחק, מקבלים את חוקיו, ואין שחקנים חיצוניים(כמו שופט או ממשלה)
- רציונליות
- פרטיות - לשחקנים אין מידע פנימי על ההתנהגות של השחקנים האחרים במהלכים הבאים
  - זה אומר שהשחקנים לא יודעים את פונקציית הערך של השחקנים האחרים!
- לשחקנים זכות שווה בהחלטה על החלוקה של S

המטרה

למצוא שיטת חלוקה הוגנת - שיטה שבה מובטח כי לכל שחקן תהיה הזדמנות לקבל נתח הוגן(fair share) של S

הגדרה - נתח הוגן

בהינתן N שחקנים, נתח $s \subseteq S$ יחשב כהוגן(fair) לשחקן P אם שוויו לשחקן P הוא לפחות $\frac{1}{N}$ מהשווי הכולל של S ל-P.
זה בעייתי כאשר סכום ערכי הנתחים הבדידים קטן מערך העוגה כולה - למשל אם מחלקים מכונית, המכונית כולה שווה יותר מסכום כל החלקים שלה.

שלושה סוגים של fair division games

- רציפים - אפשר לחתוך את הסט איך שרוצים(למשל עוגה)
- בדידים - S הוא אוסף אובייקטים שאינם ניתנים לחלוקה(למשל כרטיסים למופע)
- מעורבים - חלק מהאובייקטים ב-S הם רציפים וחלק בדידים

מקליד: עידן אריה
מרצה: פרופ' דוד סרנה
תאריך: 2015-11-22

קבלת החלטות בסביבה דינמית משתנה
89-514-01

שיטה ראשונה - Divider Chooser

בהינתן שני שחקנים:

- אחד יהיה הdivider שיחלק את הסט לשני חלקים
- הchooser יבחר אחד החלקים כרצונו

עבור משחקים רציפים זה מבטיח שכל שחקן יקבל לפחות fair share:

- הchooser יכול לבחור, ומכיוון שיש רק שני חלקים אחד מהם בטוח fair share
- הdivider רוצה להגן על עצמו, ולכן יחתוך כך ששני החלקים הם fair share עבורו

הרחבה ל3 שחקנים - The Lone Divider Method

אחד מהשחקנים הוא הdivider והשניים אחרים הם הchooserים

1. הdivider מחלק את העוגה ל3 חלקים
2. כל אחד מהchooserים מכריז איזה חלקים הם fair share עבורם(יכול להיות יותר מחלק אחד לכל chooser)
   - חלקים שהוכרזו על ידי לפחות chooser אחד הם C-pieces
   - חלקים שלא הוכרזו על ידי אף שחקן הם U-pieces
3. () אם יש לפחות שני חלקים שנבחרו כC-piece נותנים שניים מהם לchooserים
   () אם יש C-piece אחד בלבד אז נותנים אחד מהU-pieces לdivier, מחברים את הC-pieces לעוגה חדשה ונותנים לשני הchooserים לחלק ביניהם בDivider-Chooser רגיל

ניתן להרחיב את השיטה לN שחקנים:

- שני השלבים הראשונים - ללא שינוי:

1. הdivider מחלק לN חלקים $s_1, s_2, \dots s_N$
2. כל chooser מכריז איזה חלקים הם fair share

3. () אם ניתן לתת לכל chooser אחד C-piece אז נותנים והdivider מקבל את מה שנשאר
   () אם לא - יש k שחקנים שבחרו באותה קבוצה של פחות מk חלקים.
   - השחקנים האחרים יקבלו את הfair share שלהם
   - השחקנים שבחרו באותה קבוצה של פחות מk חלקים ישחקו בlone divider עם מה שנשאר

שיטת Lone Chooser

שחקן אחד הוא הchooser והשניים האחרים הם הdividerים.

1. הdividerים מחלקים ביניהם את העוגה עם divider-chooser
2. כל divider מחלק את החלק שלו ל3 חלקים
3. הchooser בוחר את אחד החלקים מכל divider, וכל divider מקבל את 2 החלקים שלא נבחרו

ניתן להרחיב לN שחקנים:

מגדירים chooser אחד ו$N-1$ dividerים

1. הdividerים מחלקים ביניהם את העוגה עם Lone Chooser(רקורסיבי)
2. כל divider מחלק את החלק שלו לN חלקים
3. הchooser בוחר את אחד החלקים מכל divider, וכל divider מקבל את $N-1$ החלקים שלא נבחרו

שיטת The Last-Diminisher

בכל שלב העוגה מחולקת לשני חלקים(לא בהכרח שווים), כאשר שחקן אחד מקבל חלק אחד והשאר מוקצה לשאר השחקנים

- שחקן P_1 מציע חלוקה בגודל $\frac{1}{N}$ עבור עצמו. הוא יחלק בדיוק $\frac{1}{N}$ כדי שאם יקבל את החלק הוא לא יפסיד ואם לא אז שחקן אחר לא ירוויח על חשבונו
- שחקן P_2 יכול לבצע pass או להפחית. אם הוא מפחית הוא הופך לבעלים של החלק המופחת
- וכן הלאה עד לשחקן הN. השחקן הN יכול לעשות pass(ואז השחקן האחרון שהפחית יקבל את הfair share) או לקבל על עצמו את החלק(הוא לא צריך להפחית)
- בסיבוב הבא יש $N-1$ שחקנים.

נשים ♡:
- אף שחקן לא יחתוך כך שישאר פחות מהfair share שלו - כי אז הוא מסתכן בכך שהוא יקבל את החלק הזה.
- שחקן לא יחתוך פחות מדי, כי אז שחקן אחר יכול לבחור את החלק
- שחקן לא יעשה pass על חלק גדול מדי כי אז הוא מסתכן שבסוף הסבב החלק שנשאר יהיה גדול מדי ויכול להיות שלא ישאר לו fair share.

חלוקה דיסקרטית

עד עכשיו יכולנו לחלק Sים רציפים כרצוננו. אבל מצב שבו S מורכב מפריטים בלתי ניתנים לחלוקה(indivisible) הוא יותר מורכב. Fair Share עדיין יכול להיות מובטח - תחת הנחות מסויימות.

שיטת Sealed Bids

1. כל אחד מהשחקנים מעביר bid - כותב כמה שווים לו כל אחד מהפריטים ומכניס למעטפה סגורה(כדי שהאחרים לא יבססו על זה את ההערכות שלהם).
2. כל אחד מהפריטים הולך לשחקן שנתן לו את הערך הכי גבוה(אם יש תיקו מטילים מטבע)
3. מחשבים את הfair share - סוכמים את <u>הbidים לפריטים השונים</u> ומחלקים ב<u>מספר השחקנים</u>[1]. כל שחקן, בהתאם לפריטים שקיבל, צריך לשלם לקופה המרכזית(אם קיבל יותר מהfair share שלו) או לקבל ממנה כסף(אם קיבל פחות).

יוותר בקופה כסף(כי כל פריט נתנו למי שהעריך אותו בהכי הרבה) - נחלק אותו שווה בשווה לכל השחקנים. החלוקה לא משנה - את הfair share כבר השגנו.

[1] לשים ♡: טעויות נפוצות:
- לסכום את הערך של פריט לכל השחקנים
- לחלק במספר הפריטים