תרגיל בית 8 -מתמטיקה בדידה

שאלה 1.
יהי (A,R) קס"ח ותת קבוצה $B\subseteq A$. הוכיחו או הפריכו כי: $a=\inf(B)$ אם ורק אם a איבר ראשון ב-$B\cup\{a\}$.

פתרון. נפריך את הכיוון "$\Rightarrow$". נסתכל בקס"ח $(\mathbb{N},\leq)$. נסתכל על $B=\{3,4\}$. מתקיים כי ב-$B\cup\{1\}$ האיבר הראשון הוא 1 אבל $\inf(B)=3\neq 1$.

שאלה 2. נסתכל על הקס"ח $(\mathbb{N}\setminus\{0\},|)$ יהי $B=\{n,m\}$ תת קבוצה של $\mathbb{N}\setminus\{0\}$. מצאו את $\inf(B),\sup(B)$ אם קיימים. אם לא, מצאו: m,n כך ש-$\sup(B)$ או $\inf(B)$ לא קיים. (כמובן, יש להוכיח כל טענה).

פתרון. יהי $B=\{n,m\}$. נפרק לגורמים ראשוניים את n,m:

$$n=p_{n,1}^{n_1}\cdots p_{n,t}^{n_t}\,,\,m=p_{m,1}^{m_1}\cdots p_{m,k}^{m_k}$$

נניח בלי הגבלת הכלליות כי $p_{n,1}=p_{m,1}$ ונטען כי $\inf(B)=p_{n,1}^{\min(m_1,n_1)}\cdots p_{n,t}^{n_t}\cdot p_{m,2}^{m_2}\cdots p_{m,k}^{m_k}$

נסמן $l=p_{n,1}^{\min(m_1,n_1)}\cdots p_{n,t}^{n_t}\cdot p_{m,2}^{m_2}\cdots p_{m,k}^{m_k}$. ברור כי $l\mid m\,,\,l\mid n$ ולכן חסם מלרע. נשאר להראות כי הוא גדול יותר מכל חסם מלרע אחר. יהי l' חסם מלרע של B אזי לפי הגדרה נובע כי:

$$l'\mid m\,,\,l'\mid n$$

לכן $l'=p_{n,1}^{l'_1}\cdots p_{n,t}^{l'_t}\cdot p_{m,2}^{l'_{t+1}}\cdots p_{m,k}^{l'_{t+k}}$ כאשר עבור $1<i\leq t$ מתקיים: $l'_i\leq n_i$, ועבור $1<i\leq k$ מתקיים: $l'_{t+i}\leq m_i$. כעת, מכיוון ש p_{n_1} מחלק את n,m נקבל כי $l'\leq n_1,m_1$ כלומר; $l'\leq\min(n_1,m_1)$. ולכן סה"כ $l'\mid l$. (את l לעיתים מסמנים כ-$\gcd(m,n)$ והוא נקרא המחלק המשותף הגדול ביותר של n,m).

עבור ה-sup נסמן: $l=p_{n,1}^{\max(m_1,n_1)}\cdots p_{n,t}^{n_t}\cdot p_{m,2}^{m_2}\cdots p_{m,k}^{m_k}$ ההוכחה שזהו אכן ה-sup דומה. (את l במקרה הנ"ל מסמנים כ-$\operatorname{lcm}(m,n)$ והוא המכפלה המשותפת הקטנה ביותר של m,n).

הערה: נסו להראות כי: $\operatorname{lcm}(m,n)=\frac{m\cdot n}{\gcd(m,n)}$

שאלה 3. עבור הזוגות הסדורים הבאים:

(1) $([0,1)\times[0,1],\leq_s)$ (יחס המכפלה) כך ש- $(x,y)\leq_s(z,w)\;\Leftrightarrow\;(x\leq z)\wedge(y\leq w)$.

(2) $([0,1)\times[0,1],\leq_{\text{al}})$ כך ש- $(x,y)\leq_{\text{al}}(z,w)\;\Leftrightarrow\;(y<w)\vee((y=w)\wedge(x\leq z))$ (היחס-הלקסיקוגרפי ההפוך).

מצאו והראו את הבאים:

א. הזוגות הסדורים הללו הם קס"ח (במובן החלש).

ב. מצאו עבור כל אחד מהקס"חים האלה: איבר מינימאלי, מקסימלי, מינימום, מקסימום (אם קיימים). אם לא קיימים הוכיחו זאת.

פתרון.

א. נראה כי: $([0,1)\times[0,1],\leq_s)$ קס"ח במובן החלש.

(1) רפלקסיביות: יהי $(x,y) \in [0,1) \times [0,1)$ נבקש להראות כי $(x,y) \le_s (x,y)$. אכן $x \le x$ וגם $y \le y$ ולכן $(x,y) \le_s (x,y)$.

(2) אנטי-סימטריות: יהי $(x_0,y_0),(x_1,y_1) \in [0,1) \times [0,1]$ כך ש- $(x_0,y_0) \le_s (x_1,y_1)$ וגם: $(x_1,y_1) \le_s (x_0,y_0)$. נבקש להראות כי $(x_0,y_0) = (x_1,y_1)$ מתקיים:

$$(y_0 \le y_1) \wedge (x_0 \le x_1) \Leftarrow (x_0,y_0) \le_s (x_1,y_1)$$

ומצד שני:

$$(y_1 \le y_0) \wedge (x_1 \le x_0) \Leftarrow (x_1,y_1) \le_s (x_0,y_0)$$

ולכן $x_0 = x_1$ וגם $y_0 = y_1$. כדרוש.

(3) טרנזיטיביות: יהי $(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in [0,1) \times [0,1]$ כך ש- $(x_0,y_0) \le_s (x_1,y_1)$ וגם $(x_1,y_1) \le_s (x_2,y_2)$. נבקש להראות כי: $(x_0,y_0) \le_s (x_2,y_2)$. מתקיים:

$$(y_0 \le y_1) \wedge (x_0 \le x_1) \Leftarrow (x_0,y_0) \le_s (x_1,y_1)$$

וגם

$$(y_1 \le y_2) \wedge (x_1 \le x_2) \Leftarrow (x_0,y_0) \le_s (x_1,y_1)$$

לכן סה"כ:

$$((y_0 \le y_1) \wedge (x_0 \le x_1)) \wedge ((y_1 \le y_2) \wedge (x_1 \le x_2))$$

ולכן:

$$(x_0 \le x_2) \wedge (y_0 \le y_2)$$

לפי הגדרת היחס נובע כי: $(x_0,y_0) \le_s (x_2,y_2)$. כדרוש.

עבור היחס השני נשים לב כי עבור: $(x,y),(z,w) \in [0,1) \times [0,1]$ מתקיים כי:

$$(x,y) \le_{\text{al}} (z,w) \Leftrightarrow (y,x) \le_{\text{lex}} (w,z)$$

מכיוון שראינו כי היחס הלקסיקוגרפי הוא קס"ח נקבל כי היחס האנטי-לקסיקוגרפי הוא קס"ח.

ב. נתחיל בקס"ח הראשון:

(1) איבר ראשון: $(0,0)$ הוא איבר ראשון, מכיוון שלכל $(x,y) \in [0,1) \times [0,1)$ מתקיים כי $0 \le x$ וגם $0 \le y$ ולכן לפי הגדרת היחס נקבל: $(0,0) \le_s (x,y)$

(2) איבר מקסימלי: נראה כי לכל איבר $(x,y) \in [0,1) \times [0,1]$ קיים איבר גדול ממנו בקס"ח ולכן אין איבר מקסימלי. נסתכל על $(x, \frac{y+1}{2})$ נשים לב כי זהו אכן איבר בקס"ח ומתקיים:

$$(x \le x) \wedge (y \le \tfrac{y+1}{2})$$

בנוסף: $(x,y) \neq (x, \frac{y+1}{2})$ כי: $y < \frac{y+1}{2}$

הערה: אם אין איבר מקסימלי אזי אין איבר אחרון ואם יש איבר ראשון אזי יש איבר מינמלי יחיד והוא האיבר הראשון.

עבור הקסח השני:

- איבר ראשון: שוב, $(0,0)$ הוא איבר ראשון, מכיוון שלכל $(x,y) \in [0,1) \times [0,1)$ מתקיים:

$$0 \le x \text{ וגם } 0 \le y$$

ולכן בפרט:

$$(0 < y) \vee ((0 = y) \wedge (0 \le x))$$

- <u>איבר מקסימלי</u>: בדומה לסעיף א: לכל איבר $(x,y)\in[0,1)\times[0,1]$ מתקיים כי $(\frac{x+1}{2},y)$ גדול ממנו בקס"ח.

שאלה 4. יהי A קבוצה. נסתכל על הקבוצה הבאה:

$$\mathbf{P}(A):=\{P\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))\colon \text{P חלוקה על A}\}$$

ונגדיר יחס $\le$ על $\mathbf{P}(A)$ באופן הבא: $P_0\le P_1 \Leftrightarrow (\forall p_0\in P_0\exists p_1\in P_1\colon p_0\subseteq p_1)$

א. הראו כי $(\mathbf{P}(A),\le)$ קס"ח לכל קבוצה A.

ב. הוכח או הפרך: עבור כל תת-קבוצה בת 2 -איברים של הקס"ח קיים חסם עליון וחסם תחתון.

פתרון.

א. נראה כי הזוג הסדור $(\mathbf{P}(A),\le)$ הוא קס"ח במובן החלש.

(1) <u>רפלקסיביות</u>: יהי $P\in\mathbf{P}(A)$, נבקש להראות כי $P\le P$. נראה זאת לפי הגדרה: יהי $p_0\in P$ צריך למצוא $p'\in P$ כך ש- $p\subseteq p'$. ואכן מתקיים עבור $p'=p$.

(2) <u>אנטי-סימטריות</u>: יהי $P_0,P_1\in\mathbf{P}(A)$ כך ש- $P_0\le P_1$ וגם $P_1\le P_0$ נבקש להראות כי $P_1=P_0$. נראה זאת ע"י הכלה דו כיוונית:

"$\subseteq$" יהי $p_1\in P_1$ ונראה כי $p_1\in P_0$. מהנתון כי $P_1\le P_0$ מתקיים כי קיים $p_0\in P_0$ כך ש- $p_1\subset p_0$. מצד שני, מכיוון ש-$P_0\le P_1$ קיים $p_1'\in P_1$ כך ש- $p_0\subset p_1'$. אבל אז: $p'1\cap p_1\neq\emptyset$ ולכן $p_1'=p_1$ היות ו-P_1 חלוקה. סה"כ נקבל כי $p_0\subseteq p_1\subseteq p_0$ כלומר, $p_0=p_1$. כדרוש.

"$\supseteq$" דומה.

(3) <u>טרנזיטיביות</u>:

יהי $P_0,P_1,P_2\in\mathbf{P}(A)$ ונניח כי $P_0\le P_1$, $P_1\le P_2$. צריך להראות כי $P_0\le P_1$. נראה זאת לפי הגדרה: יהי $p_0\in P_0$ צריך למצוא $p_2\in P_2$ כך ש- $p_0\subseteq p_2$. נשים לב כי מכיוון ש- $P_0\le P_1$ קיים $p_1\in P_1$ כך ש- $p_0\subseteq p_1$. בנוסף, מכיוון ש- $P_1\le P_2$ קיים $p_2\in P_2$ כך ש- $p_1\subseteq p_2$. כלומר סה"כ:

$$p_0\subseteq p_1\subseteq p_2$$

כדרוש.

ב. יהי $B=\{P_0,P_1\}\subseteq\mathbf{P}(A)$, נראה כי $P:=\{p_0\cap p_1\colon(\forall i\le 1\ p_i\in P_i)\wedge(p_0\cap p_1\neq\emptyset)\}$ הוא חסם תחתון של B.

ראשית, נראה כי P חלוקה:

(1) $\bigcup P=\bigcap_{p_0\in P_0\,,\,p_1\in P_1}(p_0\cap p_1)=\bigcup_{p_0\in P_0}\bigcup_{p_1\in P_1}(p_0\cap p_1)=\bigcup_{p_0\in P_0}(p_0\cap(\bigcup P_1))=$
$=\bigcup_{p_0\in P_0}p_0=A$

(2) עבור $P\ni p'\neq p$נניח כי $p'=p_0'\cap p_1'$ ו- $p=p_0\cap p_1$ עבור $p_0',p_0\in P_0$, $p_1',p_1\in P_1$. בלי הגבלת הכלליות נניח כי $p_0\neq p_0'$. ונקבל: $p'\cap p\subseteq p_0'\cap p_0=set$.

כעת נראה כי P הוא חסם מלרע. נעשה זאת לפי הגדרת היחס: יהי $p\in P$ אזי לפי הגדרת P קיימים $p_0,p_1\in P$ כך ש $p=p_0\cap p_1$. אזי $P\le P_0$ כי עבור p_0 הנ"ל מתקיים: $p\subseteq p_0$. בדומה $P\le P_1$ כי עבור p_1 מתקיים $p\subseteq p_1$. כדרוש.

כעת נראה היא הוא איבר אחרון בקבוצת חסמי המלרע של B ונסיים. יהי P' חסם מלרע של B יהי $p'\in P'$ מתקיים:

$$P' \leq P_0 \Rightarrow \exists p_0 \in P_0 : p' \subseteq p_0 \quad (1)$$
$$P' \leq P_1 \Rightarrow \exists p_1 \in P_1 : p' \subseteq p_1 \quad (2)$$

ולכן $p' \subseteq p_0 \cap p_1$ ולכן $p_0 \cap p_1 \neq \emptyset$. מכאן נובע ש-$P$ $p_0 \cap p_1 \in$ כדרוש.

(רשות) עבור חסם עליון:

אם A סופית:

טענה: אם $(L, \leq)$ סריג סופי ולכל תתקבוצה בת-2 איברים יש חסם תחתון וקיים איבר אחרון בקס"ח אזי L סריג.

הוכחה: ראינו כי עבור קבוצה סופית אם לכל תת-קבוצה בת 2-איברים יש חסם תחתון אזי לכל תת-קבוצה יש חסם תחתון. לכן בהינתן קבוצה B מעוצמה 2, נגדיר B' להיות קבוצת חסמי המלעיל שלה. נשים לב כי B' לא ריקה כי קיים איבר אחרון. לכן: קיים $\inf(B')$. לפי הגדרה זה החסם העליון.

אתגר: הוכיחו קיים חסם עליון עבור A אינסופית.

עבור כל $p_0 \in P_0$ הגדירו:

$$A_{p_0} := \bigcup\{p_1 \in P_1 \colon p_0 \cap p_1 \neq \emptyset\}$$

והסתכלו על:

$$A'_{p_0} := \bigcup\{A_p \colon A_{p_0} \cap A_p \neq \emptyset\}$$