פיתרון תרגיל 2
83-118 סמסטר ב' תשע"ח

15 במרץ 2018

1. כמה סדרות $(a_1, a_2, ..., a_k)$ של k מספרים מתוך $[n] = \{1, 2, ..., n\}$ יש המקיימות: $\forall 1 \leq i \leq k-1 : a_{i+1} \geq a_i + 4$?

פיתרון נסמן $x_0 = a_1$, ולכל $1 \leq i \leq k-1$ נסמן $x_i = a_{i+1} - a_i$, ועוד נסמן $x_k = n - a_k$. נקבל שמספר הסדרות הנתונות שקול למספר הפתרונות למשוואה:

$$x_0 + x_1 + x_2 + ... + x_k = n \ (*)$$

כאשר $x_0 \geq 1, \forall 1 \leq i \leq k-1 : x_i \geq 4, x_k \geq 0$ שלמים אי שליליים. נמיר את המשתנים באופן הבא: נסמן $y_0 = x_0 - 1, y_k = x_k$ ולכל $1 \leq i \leq k-1$ נסמן $y_i = x_i - 4$ ונקבל שמספר הפתרונות למשוואה $(*)$ שקול למספר הפתרונות למשוואה:

$$y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_k = n - 4(k-1) - 1$$

כאשר $\forall 1 \leq i \leq k : y_i \geq 0$ שלמים אי שליליים (הורדנו $k-1$ פעמים 4), שזה, לפי מה שלמדנו,

$$\binom{k+1+n-4k+4-1-1}{n-4k+4} = \binom{n-3k+3}{k}$$

2. כמה סדרות $(a_1, ..., a_{10})$ של מספרים שלמים (לאו דוקא אי שליליים) יש המקיימות:

$$1 \leq |a_1| \leq |a_2| \leq ... \leq |a_{10}| \leq 1000 \ (*)$$

פיתרון ראשית נחשב עבור מספרים שלמים אי שליליים, כאשר במצב זה הערך המוחלט בתנאי חסר משמעות. נסמן:

$$x_1 = a_1 - 1, x_2 = a_2 - a_1, x_3 = a_3 - a_2, ..., x_{10} = a_{10} - a_9, x_{11} = 1000 - a_{10}$$

ונקבל שמספר הסדרות הנ"ל הוא בדיוק מספר הפתרונות של המשוואה $\sum_{i=1}^{11} x_i = 999$, כאשר $\forall 1 \le i \le 11 : x_i \ge 0$.
מספר הפתרונות הוא, כפי שלמדנו:

$$\binom{11+999-1}{999} = \binom{1009}{999} = \binom{1009}{10}$$

כך מצאנו את מספר הסדרות בשלמים אי שליליים, אבל התרגיל אמר שהמספרים יכולים להיות גם שליליים! נשים לב שכל סדרה בשלמים אי שליליים המקיימת את תנאי $(*)$, מקיימת את התנאי גם אם נחליף חלק מאיברי הסדרה במינוס שלהם. כלומר, אם $(a_1, ..., a_{10})$ סדרה מספרים שלמים אי שליליים המקיימת את תנאי $(*)$, אז כל הסדרות מהצורה $(\pm a_1, ..., \pm a_{10})$ מקיימות גם הן את התנאי. לכן כל סדרה כנ"ל של מספרים שלמים אי שליליים מייצגת קבוצה של 2^{10} סדרות כאלה במספרים שלמים לאו דוקא אי שליליים. (כל איבר יכול להיות אחת משתי אופציות: $+a_i$ או $-a_i$) לכן הפיתרון הסופי הוא:

$$2^{10}\binom{1009}{10}$$

3. הועד האקדמי של הפקולטה להנדסה פרסם תחרות מאמרים אקדמיים: יחולקו 5 פרסים כספיים (מניחים שבפקולטה יש לפחות 5 סטודנטים שיגישו מאמר) בסדר עולה, עם הפרש של לפחות 1000 ש"ח בין פרס לפרס, כאשר הפרס הראשון (עבור המאמר המוצלח ביותר) יהיה לכל היותר 20000 ש"ח, והאחרון (עבור המאמר החמישי במוצלחותו) יהיה לכל הפחות 1000 ש"ח. כמה אפשרויות יש לחלוקת הפרסים בין הסטודנטים?

פיתרון הבעיה שקולה לבעיה הבאה: כמה סדרות של מספרים $(a_1, ..., a_5)$ יש המקיימות: $a_1 \ge 1000, a_5 \le 20000$, ובנוסף לכל $1 \le i \le 4$ מתקיים $a_{i+1} \ge a_i + 1000$. נסמן $x_0 = a_1 - 1000, \forall 1 \le i \le 4 : x_i = a_{i+1} - a_i - 1000, x_5 = 20000 - a_5$.
נקבל שמספר הסדרות הנ"ל שקול למספר הפתרונות למשוואה $\sum_{i=0}^{5} x_i = 15000$ כאשר לכל $0 \le i \le 5$ המשתנה x_i שלם אי שלילי. מספר הפתרונות הוא:

$$\binom{6+15000-1}{6-1} = \binom{15005}{5}$$

4. כמה קבוצות של 4 מספרים מתוך $\{1, 2, \ldots, 100\}$ אינן מכילות שני מספרים עוקבים?

פיתרון נסדר כל קבוצה כזו בסדר עולה, ונקבל סדרה $(a_1, ..., a_4)$ המקיימת: $a_1 \ge 1, \forall 1 \le i \le 3 : a_{i+1} \ge a_i + 2, a_4 \le 100$.
נסמן: $x_0 = a_1 - 1, \forall 1 \le i \le 3 : x_i = a_{i+1} - a_i - 2, x_4 = 100 - a_4$. מספר הסדרות הנ"ל (הזהה למספר הקבוצות שאינן מכילות שני מספרים עוקבים) שקול למספר הפתרונות למשוואה $\sum_{i=0}^{4} x_i = 93$. לכן נקבל:

$$\binom{93+5-1}{93} = \binom{97}{93}$$

5. כמה מחלקים טבעיים (ללא שארית, כמובן) שונים יש למספר 600? (רמז: העזרו בפירוק המספר לראשוניים.)

פיתרון נשים לב ש- $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, לכן כל מספר מהצורה $2^i \cdot 3^j \cdot 5^k$ כאשר $0 \leq i \leq 3, 0 \leq i \leq 1, 0 \leq k \leq 2$ מחלק את 600. לכן מספר המחלקים הוא: $|\{0,1,2,3\}| \cdot |\{0,1\}| \cdot |\{0,1,2\}| = 4 \cdot 2 \cdot 3$.

6. כמה פתרונות יש למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$, כאשר $x_i \leq 20$ שלמים (לא בהכרח אי שליליים)?

פיתרון נמיר כל משתנה בנגדי שלו (כלומר, נסמן $x'_i = -x_i$) ונקבל משוואה חדשה $x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 = -30$ כאשר $x'_i \geq -20$. נוסיף 20 לכל משתנה ו־80 לאגף ימין ונקבל את המשוואה $x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 = 50$ כאשר $x'_i \geq 0$ שלם, שמספר פתרונותיה הוא: $\binom{53}{50}$.