אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 10 – פתרון

שאלה 1 (בסיס נורמלי ושימושיו)

הגדרה: תהי E/F הרחבת גלואה ממימד סופי. *__בסיס נורמלי__* ל-E/F הוא בסיס B של E כמרחב וקטורי מעל F כך שקיים $a \in E$ עבורו $B = \{\sigma a | \sigma \in Gal(E/F)\}$. [כלומר, B הוא מסלול תחת הפעולה של $Gal(E/F)$ על E.]

משפט הבסיס הנורמלי: לכל הרחבת גלואה ממימד סופי קיים בסיס נורמלי.[1]

שאלות:

1. תהי E/F הרחבת __גלואה__ ממימד סופי ויהי $a \in E$ כך ש- $B = \{\sigma a | \sigma \in Gal(E/F)\}$ בסיס נורמלי. הוכיחו כי לכל $H \leq Gal(E/F)$ מתקיים $E^H = F[\sum_{\sigma\in H} \sigma a]$. [רמז: מהם צמודי גלואה של $\sum_{\sigma\in H} \sigma a$?]
2. יהי $p > 2$ ראשוני ו-$\rho_p = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\right)$. הראו כי $\{\rho_p, \rho_p^2, \dots, \rho_p^{p-1}\}$ בסיס נורמלי ל-$\mathbb{Q}[\rho_p]/\mathbb{Q}$. (ניתן להיעזר בתרגיל בית 9).
3. בעזרת סעיפים 1 ו-2 או בכל דרך אחרת, ציירו דיאגרמה של כל שדות הביניים $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{Q}[\rho_{13}]$. ציינו ליד כל שדה לאיזו תת חבורה של $Gal(\mathbb{Q}[\rho_{13}]/\mathbb{Q})$ הוא מתאים. אין צורך להוכיח את כל הפרטים, אך עליכם לרשום תשובה נכונה [ראו דוגמא לדיאגרמה למטה].
4. הוכיחו בעזרת משפט הבסיס הנורמלי או בכל דרך אחרת את "משפט האבר הקדום": לכל הרחבה __ספרבילית__ ממימד סופי K/F קיים $a \in K$ כך ש-$K = F[a]$. [רמז: סגור גלואה + סעיפים קודמים.]

פתרון

הוכחה 1: נסמן $G = Gal(E/F)$.

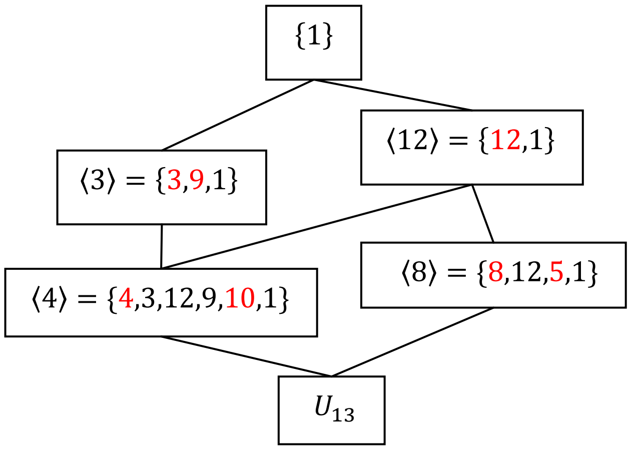
תהי $\tau \in H$, אזי $\tau(\sum_{\sigma\in H} \sigma a) = \sum_{\sigma\in H} \tau\sigma a = \sum_{\sigma\in \tau H} \sigma a = \sum_{\sigma\in H} \sigma a$ (השוויון האחרון נובע מכך ש-$\tau H = H$). לכן, $\sum_{\sigma\in H} \sigma a \in E^H$ ונובע ש-$F[\sum_{\sigma\in H} \sigma a] \subseteq E^H$. כדי להוכיח שוויון מספיק להראות ש-$[F[\sum_{\sigma\in H} \sigma a] : F] \geq [E^H : F] = \frac{[E:F]}{[E:E^H]} = \frac{|G|}{|H|} = [G:H]$ (השוויון האחרון נובע מכך ש-E/F ו-E/E^H גלואה). יהיו $g_1 H, g_2 H, \dots, g_r H$ הקוסטים השמאליים של H ב-G ($r = [G:H]$). אזי $g_i(\sum_{\sigma\in H} \sigma a) = \sum_{\sigma\in H} g_i \sigma a = \sum_{\sigma\in g_i H} \sigma a$. לפי משפט לגרנז' הקבוצות $g_1 H, g_2 H, \dots, g_r H$ הן זרות. לכן, $\sum_{\sigma\in g_1 H} \sigma a, \dots, \sum_{\sigma\in g_r H} \sigma a$ הם צירופים ליניאריים של אברי __שונים__ של $B = \{\sigma a | \sigma \in G\}$. אבל נתון ש-$B$ בסיס ולכן האיברים $\sum_{\sigma\in g_1 H} \sigma a, \dots, \sum_{\sigma\in g_r H} \sigma a$ שונים. זה אומר של-$\sum_{\sigma\in H} \sigma a$ לפחות $r = [G:H]$ צמודים שונים ולכן $[F[\sum_{\sigma\in H} \sigma a] : F] \geq [G:H]$. **משל.**

הוכחה 2: בתרגיל בית 9 שאלה 1 סעיף 1 הוכחנו כי הקבוצה $\{\rho_p, \rho_p^2, \dots, \rho_p^{p-1}\}$ היא בסיס ל-$\mathbb{Q}[\rho_p]/\mathbb{Q}$. כל אברי קבוצה זו הם שורשי יחידה p-פרימיטיביים ולכן הם צמודים זה לזה. כלומר, לכל i, j קיים $\sigma \in Gal(\mathbb{Q}[\rho_p]/\mathbb{Q})$ כך ש-$\sigma(\rho_p^i) = \rho_p^j$. לכן, $\{\rho_p, \rho_p^2, \dots, \rho_p^{p-1}\} = \{\sigma\rho_p | \sigma \in Gal(\mathbb{Q}[\rho_p]/\mathbb{Q})\}$. אז $\{\rho_p, \rho_p^2, \dots, \rho_p^{p-1}\}$ בסיס נורמלי. **משל.**

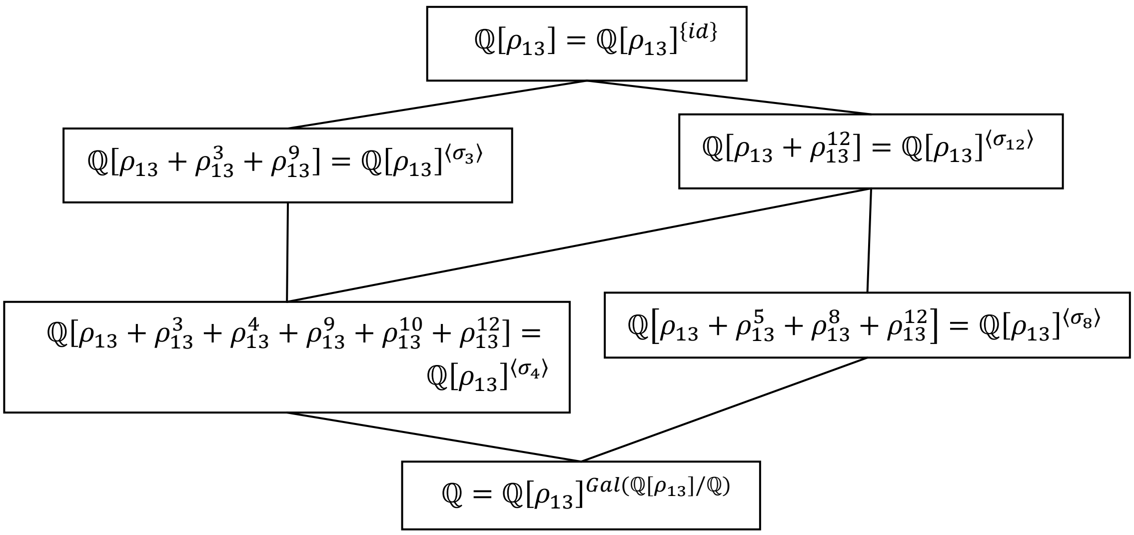
---

[1] אבל לא תמיד קל למצוא בסיס כזה...

פתרון 3: $Gal(\mathbb{Q}[\rho_{13}]/\mathbb{Q})$ איזומורפית ל-$U_{13}=\{1,2,\dots,12\}$ כאשר האיזומורפיזם נתון ע"י $i\mapsto\sigma_i$ ו-σ_i מוגדר ע"י $\sigma_i(\rho_{13})=\rho_{13}^i$. תתי החבורות של $U_{13}=\{1,2,\dots,12\}$ הן:



(האיברים באדום הם יוצרים של תתי החבורות). לכן, שדות הביניים של $\mathbb{Q}[\rho_{13}]/\mathbb{Q}$ הם:



(הערה: מספיק לציין רק את הדיאגרמה השנייה בפתרון התרגיל.)

הוכחה 4: תהי K/F הרחבת שדות ספרבילית ממימד סופי. אזי קיים לה סגור גלואה E. לפי המשפט היסודי של תורת גלואה קיימת $H\le Gal(E/F)$ כך ש-$K=E^H$. לפי משפט הבסיס הנורמלי קיים $a\in E$ כך ש- $B=\{\sigma a|\sigma\in Gal(E/F)\}$ היא בסיס ל-E מעל F. לכן, לפי סעיף 1, $K=E^H=F[\sum_{\sigma\in H}\sigma a]$. כלומר, K נוצר ע"י איבר אחד $(\sum_{\sigma\in H}\sigma a)$ מעל F. **משל.**

שאלה 2

עבור כל אחת מהרחבות הגלואה הבאות[2] ציירו דיארמה של תתי החבורות של חבורת גלואה ודיאגרמה של שדות ביניים. עליכם לציין איזה שדה מתאים לאיזו תת-חבורה. [ראו דוגמא עבור

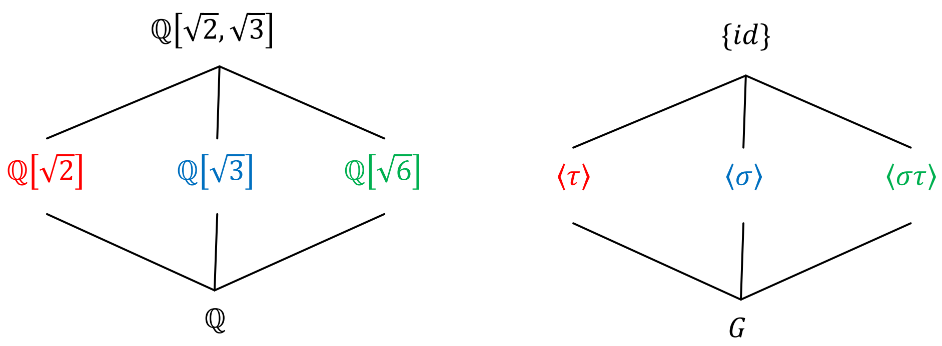
[2] אין צורך להראות שהן גלואה

השדה $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]$ בסוף.] אין צורך להוכיח את כל הפרטים[3], אך על הדיאגרמות וההתאמה בין השדות והחבורות להיות נכונות.

1. $K/\mathbb{Q}$ באשר K שדה הפיצול של x^3-3.
2. $K/\mathbb{Q}$ באשר K שדה הפיצול של x^4-6x^2-2 (אתם רשאים להיעזר בפתרון תרגיל בית מספר 5, שם מחושב שדה הפיצול והמימד שלו.) [רמז: מתקיים $\sqrt{3+\sqrt{11}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{11}}=\sqrt{-2}$ ו-$\sqrt{11}\in K$.]

דוגמא לפיתרון עבור ההרחבה $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]/\mathbb{Q}$:

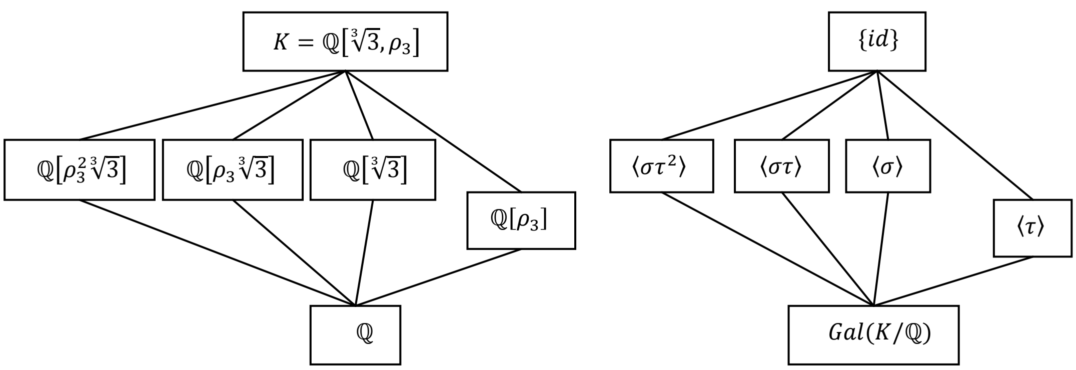
תהי $G=Gal(\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]/\mathbb{Q})$ ו-$\sigma,\tau\in G$ מוגדרות ע"י $\sigma(\sqrt{2})=-\sqrt{2},\ \sigma(\sqrt{3})=\sqrt{3}$ ו-$\tau(\sqrt{2})=\sqrt{2},\ \tau(\sqrt{3})=-\sqrt{3}$. אזי $G=\{id,\sigma,\tau,\sigma\tau\}$. הדיאגרמות הן:



כל תת שדה מתאים לתת החבורה הנמצאת במיקום שלו בדיאגרמה של תתי החבורות.

פתרון

סעיף 1: $K=\mathbb{Q}[\sqrt[3]{3},\rho_3]$ וחבורת גלואה נוצרת ע"י $\tau,\sigma\in Gal(K/\mathbb{Q})$ המוגדרות ע"י $\tau(\sqrt[3]{3})=\rho_3\sqrt[3]{3}$, $\tau(\rho_3)=\rho_3$, $\sigma(\sqrt[3]{3})=\sqrt[3]{3}$, $\sigma(\rho_3)=\rho_3^2$.



כל תת שדה מתאים לתת החבורה הנמצאת במיקום שלו בדיאגרמה של תתי החבורות.

הערה: אפשר להשתמש גם בייצוג של אברי חבורת גלואה ע"י תמורה.

---

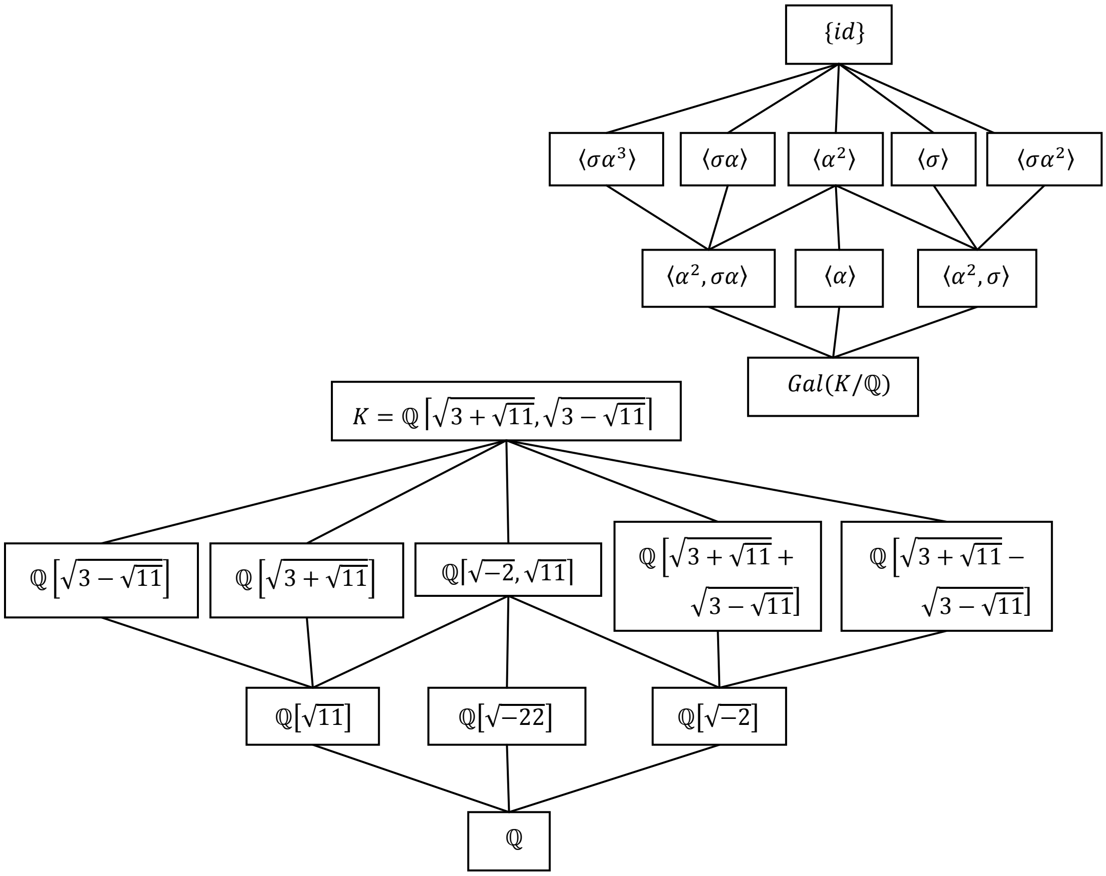
[3] אלא אם <u>לא ברור בכלל</u> מדוע השדה שרשמתם מתאים לתת חבורה מסויימת.

סעיף 2: שורשי הפולינום x^4-6x^2-2 הם $\alpha_{1,2}=\pm\sqrt{3+\sqrt{11}}$, $\alpha_{3,4}=\pm\sqrt{3-\sqrt{11}}$. לכן $K=\mathbb{Q}\left[\sqrt{3+\sqrt{11}},\sqrt{3-\sqrt{11}}\right]$. החבורה $Gal(K/\mathbb{Q})$ נוצרת ע"י σ,α המוגדרים ע"י:

$\sigma\left(\sqrt{3+\sqrt{11}}\right)=\sqrt{3-\sqrt{11}},\ \sigma\left(\sqrt{3-\sqrt{11}}\right)=\sqrt{3+\sqrt{11}}$ (התמורה המתאימה: (1,3)(2,4)).

$\alpha\left(\sqrt{3+\sqrt{11}}\right)=\sqrt{3-\sqrt{11}},\ \alpha\left(\sqrt{3-\sqrt{11}}\right)=-\sqrt{3+\sqrt{11}}$ (התמורה המתאימה: (1,3,2,4)).

[קל לבדוק שמתקיים $\alpha^4=\sigma^2=id$ ו-$\alpha\sigma=\sigma\alpha^3$ ולכן $Gal(K/\mathbb{Q})\cong D_4$.]



כל תת שדה מתאים לתת החבורה הנמצאת במיקום שלו בדיאגרמה של תתי החבורות.