שיטה בסיסית להשלמת וקטורים בת"ל ב $\mathbb{F}^n$ לבסיס

26 באפריל 2017

אלגוריתם: קלט: קבוצה בת"ל של k וקטורים $\{v_1,\dots,v_k\} \subseteq \mathbb{F}^n$. פלט בסיס B המקיים $\{v_1,\dots,v_k\} \subseteq B \subseteq \mathbb{F}^n$

1. הגדירו מטריצה $A \in \mathbb{F}^{k\times n}$ עם k שורות ששורותיה הם הוקטורים $\{v_1,\dots,v_k\}$. במפורש $R_i(A)=v_i$ לכל $1 \le i \le k$
2. דרגו את המטריצה A לצורה מודרגת U.
3. נסמן $i_1,\dots,i_{n-k}$ את העמודות שאין בהם ציר (איבר מוביל) אזי הקבוצה $\{v_1,\dots,v_k\}\cup\left\{e_{i_1,\dots},e_{i_{n-k}}\right\}$ בת"ל עם n וקטורים ולכן בסיס. [הוקטור e_j הוא וקטור יחידה המוגדר להיות וקטור אפסים פרט לקורדינטה j בה הוא שווה 1]

דוגמא: השלם את הקבוצה

$$\left\{v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\\-1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\\1\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

לבסיס של $\mathbb{R}^5$.

פתרון: נגדיר

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&3&-1\\1&1&0&2&1\\-2&-2&-2&-1&1\end{pmatrix}$$

ונדרג אותה.

$$\begin{pmatrix}1&1&2&3&-1\\1&1&0&2&1\\-2&-2&-2&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&3&-1\\0&0&-2&-1&2\\0&0&2&5&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2&3&-1\\0&0&-2&-1&2\\0&0&0&4&1\end{pmatrix}$$

עמודות שאין בהם ציר הן עמודות מספר $2,4$ ולכן

$$\left\{v_1=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\3\\-1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\\1\end{pmatrix},v_3=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}\cup\left\{e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},e_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס.

תיאוריה: למה אכן מקבלים בסיס בסוף? בשביל להראות כי $\{v_1,\ldots,v_k\}\cup\{e_{i_{1,\ldots,}}e_{i_{n-k}}\}$ בסיס, נגדיר מטריצה B ששורותיה הן הוקטורים הנ"ל ואז להראות ששורות B בת"ל. שורות B יהיו בת"ל אמ"מ אחרי דירוג של B לא יהיו איברים חופשים (או במילים אחרות יהיו n צרים). אכן, נבצע את הדירוג שביצענו ב A כדי לדרג את B וסידור השורות מחדש נקבל אכן שיש n צירים. מש"ל.