שיעורי בית מספר 2

1. תהיינה $A,B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. יהא $\lambda\in\mathbb{F}$. הוכיחו כי λ ע"ע של AB אמ"מ λ ע"ע של BA [פצלו למקרים: $\lambda=0$ ו $\lambda\neq 0$].

פתרון: אם $\lambda=0$ אז AB לא הפיכה. לכן $|AB|=0$ ומכאן ש $|BA|=|AB|=0$ ולכן BA אינה הפיכה ולכן $\lambda=0$ ע"ע של BA.

אם $\lambda\neq 0$, לפי הגדרה קיים $v\neq 0$ כך ש $ABv=\lambda v$. בהכפלה ב B משמאל נקבל $BABv=B\lambda v=\lambda Bv$. λ ע"ע ש לBA בהנחה ש Bvו"ע שזה קורה אם $Bv\neq 0$.
כיוון ש $\lambda\neq 0, v\neq 0$ אז $\lambda v\neq 0$ ולכן, אם נניח בשלילה כי $Bv=0$ אז בהכפלה ב A משמאל נקבל כי $ABv=0$ אבל $ABv=\lambda v$ ונקבל סתירה.

מה שהוכחנו שאם λ ע"ע של AB אז הוא גם של BA. לכל שתי מטריצות A,B. בפרט אם ניקח $A=B$ ו $B=A$ נקבל את הכיוון השני.

2. עבור אילו ערכי $a\in\mathbb{R}$ המטריצה $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&a\\1&1&1\end{pmatrix}$ אינה לכסינה

(א) מעל $\mathbb{R}$

(ב) מעל $\mathbb{C}$

פתרון:מחישוב ישיר נקבל כי $p_A(x)=(x-1)\left(x-1+\sqrt{a}\right)\left(x-1-\sqrt{a}\right)$ ולכן הע"ע הם $1,1\pm\sqrt{a}$.

אם $a>0$ יש לנו 3 ע"ע ממשים שונים ולכן המטריצה לכסינה מעל הממשים וגם מעל המרוכבים.

אם $a<0$ אזי הפ"א לא מל"ל מעל הממשים ולכן במקרה זה המטריצה לא לכסינה. מעל המרוכבים יהיו לנו 3 ע"ע שונים ולכן לכסינה.

אם $a=0$ יהיה לו ע"ע בודד ששווה ל 1 בעל ר"א 3 ור"ג 1 ולכן המטריצה לא לכסינה גם מעל הממשים וגם מעל המרוכבים.

3. תהא $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה עם פ"א $p_A=x^3-2ix^2+3x$ מה הדרגה של A^k ?

פתרון: מתקיים כי $x^3-2ix^2+3x=x(x^2-2ix+3)=x(x+i)(x-3i)$. לכן לכסינה לכן $A^k=PD^kP^{-1}$ ולכן הדרגה שלה הוא 2 .

4. תהא $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. הוכיחו כי אם A,cA דומות (עבור c מרוכב) אזי $c^k=1$ עבור $1\leq k\leq n$ או ש $A^n=0$. הדרכה: הפ"א של cA

פתרון: אם $c=0$ אזי Aדומה למטריצת האפס ולכן $A=0$. אחרת, נסמן $p_A(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ ואז

$$p_{cA}(x)=|xI-cA|=\left|c\left(\frac{x}{c}I-A\right)\right|=c^n\left|\left(\frac{x}{c}I-A\right)\right|=c^np_A(\frac{x}{c})=c^n\sum_{i=0}^{n}a_i\left(\frac{x}{c}\right)^i=\sum_{i=0}^{n}c^{n-i}a_ix^i$$

כיוון שלמטריצות דומות אותו פ"א אזי $\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=\sum_{i=0}^{n}c^{n-i}a_ix^i$ ולכן $c^{n-i}a_i=a_i$ לכל $0\leq i\leq n$. אם קיים $0\leq i\leq n-1$ כך ש $a_i\neq 0$ אזי $c^{n-i}=1$ וסיימנו. אחרת, לכל $0\leq i\leq n-1$ מתקיים כי $a_i=0$ ואז נקבל כי $p_A(x)=x^n$ ($a_n=1$ כי זהו פולינום מתוקן). לפי קיילי המילטון $A^n=0$.

5. מצאו צורת זורדן למטריצה

$$A=\begin{pmatrix}3&0&1&0\\8&-3&1&-2\\0&0&3&0\\-8&2&-3&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{4\times4}$$

פתרון:

$$p_A(x)=\left|\begin{pmatrix}x-3&0&-1&0\\-8&x+3&-1&2\\0&0&x-3&0\\8&-2&3&x-1\end{pmatrix}\right|=(x-3)\left|\begin{pmatrix}x-3&0&0\\-8&x+3&2\\8&-2&x-1\end{pmatrix}\right|=(x-3)^2\left|\begin{pmatrix}x+3&2\\-2&x-1\end{pmatrix}\right|=(x-3)^2(x$$

ולכן הע"ע הם $3,-1$. מ"ע ומ"ע מוכללים. עבור $x=3$:

$$N(A-3I)=N\begin{pmatrix}0&0&1&0\\8&-6&1&-2\\0&0&0&0\\-8&2&-3&-2\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}0&0&1&0\\8&-6&1&-2\\0&0&0&0\\0&-4&-2&-4\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}8&-6&0&-2\\0&-4&0&-4\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=$$

$$=N\begin{pmatrix}8&0&0&4\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}1&0&0&1/2\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}-1/2t\\-t\\0\\t\end{pmatrix}\,:\,t\in\mathbb{R}^4\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$N(A+I)=N\begin{pmatrix}4&0&1&0\\8&-2&1&-2\\0&0&4&0\\-8&2&-3&2\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}4&0&1&0\\0&-2&-1&-2\\0&0&4&0\\0&2&-1&2\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}4&0&1&0\\0&-2&-1&-2\\0&0&4&0\\0&0&-2&0\end{pmatrix}=$$

$$=N\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&-2&0&-2\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}0\\-t\\0\\t\end{pmatrix}\,:\,t\in\mathbb{R}^4\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן $m_A(x)=p_A(x)$ ולכן צורת זורדן היא

$$\begin{pmatrix}3&1&&\\&3&&\\&&-1&1\\&&&-1\end{pmatrix}$$

6. תהא $A=J_5(0)$ מה צורת זורדן של A^2,A^3?

פתרון: מתקיים כי

$$A^2=\begin{pmatrix}0&0&1&&\\&0&0&1&\\&&0&0&1\\&&&0&0\\&&&&0\end{pmatrix},A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1&\\&0&0&0&1\\&&0&0&0\\&&&0&0\\&&&&0\end{pmatrix}$$

ולכן הר"ג של 0 עבור A^2 הוא 2 ועבור A^3 הוא 3. בנוסף $m_{A^2}(x) = x^3, m_{A^3}(x) =$ x^2 כי $m_A(x) = x^5$ ולכן

$$J(A^2) = J_3(0) \oplus J_2(0),\ J(A^3) = j_2(0) \oplus J_2(0) \oplus J_1(0)$$

יהיו $S, T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ שתי ה"ל כך ש $\deg m_T, \deg m_S \leq 2$. הוכיחו כי קיים ו"ע משותף (כלומר קיים $v \neq 0$ כך ש v ו"ע גם של T וגם של S). הדרכה: הוכיחו כי קיים מ"ע מימד 2 לפחות.

פתרון: אם $m_T(x) = (x-\lambda)^2$ אזי צורת זורדן כי $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$ והמ"ע V_λ מימד 2.

אם $m_T(x) = (x-\lambda)(x-\mu)$ כאשר λ, μ שונים אזי T לכסינה והר"א של אחד מה"ע הוא 2 וזהו גם הר"ג שלו.

אם $m_T(x) = x - \lambda$ אזי V_λ מימד 3. בכל מקרה נקבל כי קיים λ ע"ע של T כך שV_λ מימד 2 לפחות. באותו אופן קיים μ ע"ע של S כך ש V_μ מימד 2 לפחות. ממשפט המימדים נקבל כי החיתוך שלהם לא ריק ולכן קיים ו"ע משותף.