מבוא לטופולוגיה תרגיל 2 (פתרון)

1. א' x_n היא סדרת קושי ⇐ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $d(x_n, x_{n_0}) < 1$ לכל $n \geq n_0$ (לפי הגדרת סדרת קושי כאשר $\varepsilon = 1$). אם נסמן:
$$r = \max\{d(x_1, x_{n_0}), d(x_2, x_{n_0}), \dots, d(x_{n_0-1}, x_{n_0}), 1\} + \frac{1}{2}$$
נקבל: $d(x_n, x_{n_0}) < r$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ⇐ $\{x_n\} \subseteq B(x_{n_0}, r)$ ⇐ x_n היא סדרה חסומה.

ב' נניח ש-$x_n \to x$. הוכחנו בהרצאה שכל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי. לכן x_n מתכנסת, ולפי א', היא חסומה.

2. ⇐. תהי f רציפה ו- $F \subseteq B$ סגורה. אזי קיימת קבוצה פתוחה $U \subseteq B$ כך ש- $F = U^c$. אזי $\left(f^{-1}(U)\right)^c = f^{-1}(U^c) = f^{-1}(F)$. אבל $f^{-1}(U)$ פתוחה מכיוון ש- f רציפה (הרצאה). אזי $\left(f^{-1}(U)\right)^c = f^{-1}(F)$ סגורה לפי הגדרה. ■
   ⇒. תהי תמונה הפוכה של כל תת-קבוצה סגורה ב- B גם סגורה (ב-A), ותהי $U \subseteq B$ - פתוחה. אזי U^c סגורה ולכן $f^{-1}(U^c)$ גם סגורה. אבל אז $f^{-1}(U^c) = \left(f^{-1}(U)\right)^c$ סגורה ו-$f^{-1}(U)$ פתוחה.
   קיבלנו: $U \subseteq B$ פתוחה ⇐ $f^{-1}(U)$ פתוחה, וזה (הרצאה) תנאי מספיק לרציפות של הפונקציה f.■

3. א' נניח ש-$x \in M$ ו- $x_n \to x$. לפי קריטריון התכנסות הסדרות שהוכח בהרצאות זה גורר: $d(x_n, x) \to 0$. הוכח בשיעור ש- $|d(x_n, a) - d(x, a)| \leq d(x_n, x)$ אבל זה אומר ש- $|d(x_n, a) - d(x, a)| \to 0$ (אחת מהתחונות של סדרות ב-$\mathbb{R}$, ידועה מקורסים קודמים). לכן קיבלנו: $|f(x_n) - f(x)| \to 0$. אבל זה תנאי מספיק להתכנסות של סדרה $f(x_n)$ לנקודה $f(x)$ במטריקה הרגילה של $\mathbb{R}$. זאת אמרת, קיבלנו: $x_n \to x$ ⇐ $f(x_n) \to f(x)$ ומזה (ההרצאה 2) נובעת רציפות של f.

   ב' המרחק בין שתי נקודות $a, b \in \mathbb{R}^n$ במטריקה אוקלידית אפשר לבטא בנורמה האוקלידית $\|a - b\|$, הידועה מקורסים קודמים: לכל ווקטור $v \in \mathbb{R}^n$ כך ש- $v = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$: $\|v\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}$.
   f, g רציפות. לכן ניקח נקודה כלשהיא $a \in M$ ונוכיח ש- $f + g$ רציפה ב- a.
   יהיה $\varepsilon > 0$. אזי: קיים $\delta_1 > 0$ כך ש- $d(x, a) < \delta_1$ ⇐ $\|f(x) - f(a)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ (f רציפה ב- a) וקיים $\delta_2 > 0$ כך ש- $d(x, a) < \delta_2$ ⇐ $\|g(x) - g(a)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ (g רציפה ב- a).
   לפי אישוויון המשולש לנורמה: $\left\|\left(f(x) + g(x)\right) - \left(f(a) + g(a)\right)\right\| =$
   $\left\|\left(f(x) - f(a)\right) + \left(g(x) - g(a)\right)\right\| \leq \|f(x) - f(a)\| + \|g(x) - g(a)\| <$
   $\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ■

4. תהי $x_n \in F$ סדרת קושי . לכן לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ כאשר $m, n \geq n_0$. מכיוון ש- F תת-מרחב מטרי של M, זה אומר ש- x_n – סדרת קושי גם ב-M. אבל M שלם ולכן קיים $x \in M$ כך ש- $x_n \to x$. לפי התנאים, F קבוצה סגורה ולכן $x \in F$. זאת אומרמ x_n מתכנסת ב-F ולכן F מרחב מטרי שלם.

5. א' מספיק להוכיח ש-F^c – פתוחה.
יהיה $y \in F^c$. לכן: $x \in F \Leftarrow x \neq y \Leftarrow 0 < d(x,y) = \delta$.
$x_n \to x$ לכן קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n,x) < \frac{\delta}{2}$.
חוץ מי זה, $x_n \in F \Leftarrow x_n \neq y$ ולכן לכל $n < n_0$ קיימים $\delta_n > 0$
כך ש- $d(x_n,y) = \delta_n > 0$. אם נסמן $r \coloneqq \min\{\frac{\delta}{2},\frac{\delta_1}{2},\frac{\delta_2}{2},\dots,\frac{\delta_{n_0-1}}{2}\}$ אז נקבל:
$n \geq n_0 \Rightarrow x_n \in B(x,r)$ (*).
אם ניקח את הכדור $B(y,r)$, אנחנו נראה ש-
$n < n_0 \Rightarrow x_n \notin B(y,r)$ (**) כי $d(x_n,y) = \delta_n > r$.
עכשיו: $B(x,r) \cap B(y,r) = \emptyset$ (***) כי $d(x,y) = \delta$ ו-$r \leq \frac{\delta}{2}$, (אישוויון המשולש!).
מ-(*),(**),(***) נובע: $F \cap B(y,r) = \emptyset$ זאת אומרת $B(y,r) \subseteq F^c$, ולכן F^c פתוחה לפי ההגדרה.■
<u>(הערה: מומלץ לצייר את זה למקרה $M = \mathbb{R}^2$)</u>

ב' נפצל F לשתי תת-קבוצות: $F = F_1 \cup F_2$ כהשר
$F_1 = \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\dots,\frac{1}{n},\dots\right\} \cup \{0\}$ ו-$F_2 = \left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\dots,\frac{n-1}{n},\dots\right\} \cup \{1\}$
אם $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך ש-$n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$ $= |1 - \frac{n-1}{n}|$. לכן: $\frac{1}{n} \to \mathbf{0}$; $\frac{n-1}{n} \to \mathbf{1}$. זאת אומרת: <u>לפי התרגיל 5 א'</u> שגם F_1 וגם F_2 הן קבוצות סגורות. לכן $F = F_1 \cup F_2$ סגורה (לפי אחת מהתחונות קבוצות סגורות).■