מבוא לטופולוגיה - תרגיל בית 8 - פתרון

1. יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים, B_X בסיס של X,
B_Y בסיס של Y.
<u>הוכיחו</u> שפונקציה $f: X \to Y$ רציפה בנקודה $x_0 \in X$ אם"ם לכל סביבה $V \in B_Y$ של הנקודה $f(x_0)$ קיימת סביבה $U \in B_X$ של הנקודה x_0 כך ש- $f(U) \subseteq V$.

<u>הוכחה.</u>
<u>כיוון</u> $\Leftarrow$. תהי $f: X \to Y$ רציפה בנקודה $x_0 \in X$.
ותהי $f(x_0) \in V \in B_Y$. כיוון ש-V פתוחה ב-Y ולפי הגדרת רציפות פונקציה בנקודה, קיימת U' פתוחה ב-X
כך ש-$x_0 \in U'$ ו- $f(U') \subseteq V$. אבל מכוון ש- B_X בסיס של X,
קיימת קבוצה $U \in B_X$ כך ש-$x_0 \in U \subseteq U'$.
אזי $f(U) \subseteq f(U') \subseteq V$, מש"ל.

<u>כיוון</u> $\Rightarrow$.
נניח שלכל סביבה $V \in B_Y$ של הנקודה $f(x_0)$ קיימת סביבה $U \in B_X$ של הנקודה x_0 כך ש- $f(U) \subseteq V$.
נוכיח ש-f רציפה ב-x_0.
תהי V' סביבה של $f(x_0)$. אזי קיימת $V \in B_Y$
כך ש-$f(x_0) \in V \subseteq V'$ (כי B_Y בסיס). לכן לפי ההנחה קיימת סביבה $U \in B_X$ של x_0 כך ש- $f(U) \subseteq V$.
זה גורר $f(U) \subseteq V'$, לכן f רציפה ב-x_0 לפי ההגדרה, מש"ל.

2. (מההרצאה) יהי X מ"ט ו- $\{p\}$ נקודון.
הוכיחו ש-X הומאומורפי ל-$\{p\} \times X$.

הוכחה.
נגדיר העתקה $i: X \to \{p\} \times X$ כך ש- $i(x) = (p, x)$ לכל $x \in X$.
ברור ש-i העתקה חח"ע ועל.
אם U פתוחה ב-X אז $i(U) = \{p\} \times U$ פתוחה במרחב המכפלה.
כלומר העתקה i פתוחה.
כל איבר בסיס המכפלה נראה כמו $\{p\} \times V$ כעשר V פתוחה ב-X .
אז $i^{-1}(\{p\} \times V) = V$ פתוחה ב-X, כלומר תמונה הפוכה של איבר הבסיס פתוחה בתחום של i. לכן i רציפה.
כך הוכח ש-i הומאומורפיזם, מש"ל.

3. יהיו $X_1, X_2, \dots, X_n$ מ"ט כך שכל אחד מהם מכיל תת קבוצה בת מניה שצפופה בו.
הוכיחו שמ"ט $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ מכיל תת קבוצה בת מניה שצפופה בו.

הוכחה.
יהיו $X_1, \dots, X_n$ מ"ט ותהי A_i צפופה ב-X_i כך ש-A_i בת מניה.
נוכיח:
א' $A_1 \times \dots \times A_n$ צפופה ב- $Y = X_1 \times \dots \times X_n$
ב' $A = A_1 \times \dots \times A_n$ בת מניה.
הוכחת א'
תהי $U \neq \emptyset$ פתוחה ב-Y. אזי קיימת $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$. לפי הגדרת הבסיס של טופולוגית המכפלה קיימת

סביבה $U \supseteq V = V_1 \times \ldots \times V_n$ כך ש- $x \in V$ וכל קבוצה V_i פתוחה ב-X_i ולא ריקה כי $x_i \in V_i$ לכל i כך ש- $1 \le i \le n$.
לכן לכל i כך ש- $1 \le i \le n$ מתקיים $V_i \cap A_i \neq \emptyset$ כי A_i צפופה ב-X_i. כלומר לכל i כך ש- $1 \le i \le n$ קיים $x_i \in V_i \cap A_i$ ולכן $(x_1, \ldots, x_n) \in V \cap A$ שגורר $V \cap A \neq \emptyset$ ולבסוף $U \cap A \neq \emptyset$.
זה מוכיח ש-A צפופה ב-Y, צש"ל.

<u>הוכחת ב'</u>

כל A_i בת מניה לכן אפשר למספר את איבריה בצורה כזאת:

$$A_i = a_i^1, a_i^2, \ldots$$

(שימו לב: המספר למעלה זה לט חזקה אלה אינדקס טבעי!)
מסמן: $B_i^m = \{a_i^1, a_i^2, \ldots, a_i^m\}$ ו- $P^m = B_1^m \times \ldots \times B_n^m$.
B_i^m קבוצה סופית ולכן P^m קבוצה סופית.
ברור ש-$A_i \supseteq B_i^m$. (*)
חוץ מזה:
$B_i^1 \subseteq B_i^2 \subseteq \cdots$ ולכן: $P^1 \subseteq P^2 \subseteq \cdots$ (**)
אזי קל לבדוק ש-

$$A = A_1 \times \ldots \times A_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} P^m$$

<u>(בדיקה.(תרגיל ב-"בדידה"!)</u>
<u>כיוון $\supseteq$</u>
<u>יהי</u> $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \bigcup_{m=1}^{\infty} P^m$. אזי קיים m_0 כך ש-$x \in P^{m_0}$.
לכן מ-(*): $x \in B_1^{m_0} \times \ldots \times B_n^{m_0} \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$

כיוון $\subseteq$

יהי $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in A$.

אזי:

$$x_1=a_1^{j_1}$$

$$x_2=a_2^{j_1}$$

$$\cdots$$

$$x_n=a_n^{j_n}$$

מסמן: $m_0\coloneqq\max\{j_1,j_2,\dots,j_n\}$.

אזי מ-(**) $x_i=a_i^{j_i}\in B_i^{m_0}$ ו-

$$x\in B_1^{m_0}\times\ldots\times B_n^{m_0}=P^{m_0}\subseteq\bigcup_{m=1}^{\infty}P^m$$

סוף הבדיקה)

אבל $\bigcup_{m=1}^{\infty}P^m$ בת מניה כאיחוד בן מניה של קבוצות סופיות.

לכן A בת מניה, מש"ל.

4. יהי X מרחב טופולוגי.

הוכיחו ש-X הוא מרחב האוסדורף אם"ם תת קבוצה $\{(x,x)\in X\times X|x\in X\}$ סגורה במרחב המכפלה $X\times X$.

הוכחה.

כיוון 1. נסמן: $\Delta\coloneqq\{(x,x)\in X\times X|x\in X\}$

יהי X מרחב האוסדורף. נוכיח שהקבוצה Δ^c פתוחה.

יהי $(a,b)\in\Delta^c$. אזי $a\neq b\in X$. לפי תנאי האוסדורף ב-X קיימות סביבות $a\in U$ ו-$b\in V$ כך ש- $U\cap V=\emptyset$.

אזי הקבוצה $W=U\times V$ פתוחה, מכילה את (a,b)

ו-$W \cap \Delta = \emptyset$ $\Leftarrow$ $W \subseteq \Delta^c$. לכן Δ^c פתוחה ו-Δ סגורה, מש"ל.

<u>כיוון 2. תהי Δ סגורה.</u> אזי Δ^c פתוחה.
יהיו $a \neq b \in X$. אזי $(a,b) \in \Delta^c$. אזי קיימת
סביבה $(a,b) \in W$ מבסיס של תופולוגית המכפלה ב- $X \times X$
כך ש-$W \subseteq \Delta^c$. כאיבר הבסיס: $W = U \times V$ כאשר U, V
פתוחות ב-X. קל לראות (תורת הקבוצות) שתי עובדות נוספות:
- $(a,b) \in U \times V \Leftarrow a \in U$ ו-$b \in V$.
- $U \times V \subseteq \Delta^c \Leftarrow U \cap V = \emptyset$

אז X מרחב האוסדורף, מש"ל.

5. (מההרצאה) <u>הוכיחו</u> שהטופולוגיה הרגילה ב-$\mathbb{R}^n$ מתלכדת עם הטופולוגית המכפלה. (<u>הערה</u> בהרצאה היתה הוכחה חלקית (ראה\ראי). נשאר להוכיח שבתוך כל תיבה מוכל כדור ובתוך כל כדור מוכלת תיבה).

<u>תזכורת</u>
הטופולוגיה הרגילה ב-$\mathbb{R}^n$ מושרה על ידי המטריקה האוקלידית
המוגדרת בנוסחה: $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_n - y_n|^2}$ כאשר
$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
המונח "תיבה" מההרצאה מסמן איבר בסיס מרחב המכפלה $\mathbb{R}^n$
שמוגדר בנוסחה: $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$
כאשר ($a_i < b_i$) לכל i כך ש- $1 \leq i \leq n$.
==(סוף התזכורת==)

<u>כיוון 1.</u> יהי $P = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$
כאשר $a_i < x_i < b_i$ לכל i כך ש- $1 \leq i \leq n$. <u>נגדיר</u>:

$$c = (c_1, \dots, c_n) = \frac{a_1 + b_1}{2}, \dots, \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$r=\min\left\{\frac{b_i-a_i}{2}\mid 0\le i\le n\right\}$$

ונוכיח ש- $B(c,r)\subseteq P$.

יהי $x=(x_1,\dots,x_n)\in B(c,r)$. אזי $d(x,c)<r$ כלומר,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i-c_i|^2}<r\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}|x_i-c_i|^2<r^2$$

לכן $|x_i-c_i|^2<r^2$ לכל i כך ש- $1\le i\le n$. זה גורר:

ש- $|x_i-c_i|<r$ לכל i כך ש- $1\le i\le n$. כלומר,

לכל i כך ש- $1\le i\le n$:

$$\left|x_i-\frac{a_i+b_i}{2}\right|<\min\left\{\frac{|b_i-a_i|}{2}\mid 0\le i\le n\right\}\le\frac{b_i-a_i}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{a_i+b_i}{2}-\frac{b_i-a_i}{2}<x_i<\frac{a_i+b_i}{2}+\frac{b_i-a_i}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$a_i<x_i<b_i$$

כלומר, $x\in P$. הוכח בזה ש-$(c,r)\subseteq P$, מש"ל.

<u>כיוון 2.</u> יהי $B(c,r)$ כדור ב-$\mathbb{R}^n$. נגדיר $h\coloneqq\frac{r}{\sqrt{n}}$

ונתבונן בקובייה

$$C=(c_1-h,c_1+h)\times\dots\times(c_n-h,c_n+h)$$

<u>ונוכיח ש-$C\subseteq B(c,r)$</u>.

יהי $x\in C$. אזי לכל i כך ש- $1\le i\le n$ מתקיים

$$c_i-h<x_i<c_i+h\ \Leftrightarrow|x_i-c_i|<h$$

ולכן $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i-c_i|^2}<\sqrt{nh^2}=\sqrt{n}h=r$,

כלומר, $x\in B(c,r)$.

כך הוכח ש-$C \subseteq B(c,r)$, מש"ל.

6. יהי $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, x^2 + y^2 = 1\}$ עם טופולוגיה המושרה מ-$\mathbb{R}^2$. תהי $f: S^1 \times S^1 \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
<u>הוכיחו</u> ש- $f(S^1 \times S^1) = [a,b]$ כאשר $a,b \in \mathbb{R}$.

<u>הוכחה.</u>
כידוע מהלימודים הקודמים (והוזכר בהרצאות) המעגל S^1 אפשר להציג כתמונה של הפונקציה $\varphi: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי הנוסחה $\varphi(t) = (\cos t\,, \sin t)$. הפונקציה הזאת <u>רציפה</u> כי רכיביה $\cos$ ו- $\sin$ רציפים (הרצאות). המרחב $[0,2\pi]$ קומפקטי כתת קבוצה סגורה וחסומה ב-$\mathbb{R}$ (משפט היינה - בורל). לכן תמונתה $S^1 = \varphi([0,2\pi])$ <u>קומפקטית</u>.
המרחב $[0,2\pi]$ קשיר ולכן תמונתו S^1 קבוצה קשירה.
לפי משפטים מההרצה $S^1 \times S^1$ גםקבוצה קומפקטית וקשירה.
מזה נובע שתמונתה $f(S^1 \times S^1)$ קומפקטית וקשירה כי f רציפה. כיוון ש-$f(S^1 \times S^1) \subseteq \mathbb{R}$ הקומפקטית רוררת ש-$f(S^1 \times S^1)$ סגורה וחסומה.
לבסוף: $f(S^1 \times S^1) \subseteq \mathbb{R}$ סגורה, חסומה וקשירה. כהוכח בהרצאות זה יכול להיות רק קטע סגור וחסום מסוג $[a,b]$, מש"ל.