אלגברה לינארית 2

<u>תרגיל 2 - פתרון</u>

<u>שאלה 1:</u>

חשב את הדטרמיננטות של המטריצות הבאות:

א. מטריצת סיבוב 3×3 כללית מעל $\mathbb{Z}_3$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, והוכח ששווה ל- $a+b+c$.

<u>פתרון:</u> נחשב $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = a^3+b^3+c^3-(abc+bca+cab) = a^3+b^3+c^3-3\cdot abc$

מעל $\mathbb{Z}_3$ נקבל $a^3+b^3+c^3$ ולפי משפט פרמה הקטן $a+b+c$.

ב. המטריצה $A-\lambda I$ כאשר $A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{R}$, והוכח שהיא מאפסת את הפולינום המתקבל, כאשר מציבים $\alpha I \in \mathbb{R}^{3\times3}$ במקום סקלר α.

<u>פתרון:</u> נפתח לפי השורה השלישית לקבל

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -3 \\ 3 & -2-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

$$=(1-\lambda)\left[(1-\lambda)(-2-\lambda)-(-4)\cdot3\right]=(1-\lambda)\left(\lambda^2+\lambda+10\right)$$

כעת נציב את A בפולינום שהתקבל

$$A^2=\begin{pmatrix} -11 & 4 & -14 \\ -3 & -8 & -11 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2+A+10\cdot I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, I-A=\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

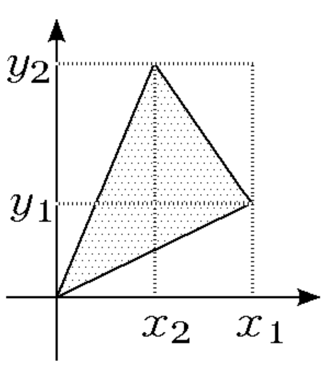
$$\Rightarrow (1-A)\left(A^2+A+10I\right)=0\in\mathbb{R}^{3\times3}$$

מש״ל

<u>שאלה 2:</u>

א. חשב שטח משולש במישור שקודקודיו הם $\vec{0}=(0,0)$, $v_1=(x_1,y_1), v_2=(x_2,y_2)$.

הוכח שהוא שווה ל- $\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}\right|$.



פתרון:

$$S_{\triangle}=x_1y_2-\frac{1}{2}\left[(x_1-x_2)(y_2-y_1)+x_2y_2+x_1y_1\right]=x_1y_2-\frac{1}{2}(x_1y_2+x_2y_1)$$

$$=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1)=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}\right|$$

מש"ל

ב. הכלל את התוצאה שקיבלת למשולש כלשהו במישור.

כלומר בהינתן משולש כלשהו במישור שקודקודיו הם $v_1=(x_1,y_1),v_2=(x_2,y_2),v_3=(x_3,y_3)$ הוכח כי שטחו שווה ל:

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{pmatrix}\right|.$$

פתרון: נבצע הזזה של המישור ב $(-v_1)$ לקבלת המשולש:

$v_1'=(0,0),v_2'=(x_2-x_1,y_2-y_1),v_3'=(x_3-x_1,y_3-y_1)$. עתה לפי סעיף (א) נטען כי

$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{pmatrix}\right|$$

$$\det\begin{pmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{pmatrix}=x_2y_3+x_1y_2+x_3y_1--x_2y_1-x_3y_2$$

נפשט את אגף ימין:

$$=x_2(y_3-y_1)-x_1y_3-x_3(y_2-y_1)+x_1y_2+(x_1y_1-x_1y_1)$$

$$=x_2(y_3-y_1)-x_1(y_3-y_1)-x_3(y_2-y_1)+x_1(y_2-y_1)$$

$$=(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)=\det\begin{pmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{pmatrix}$$

לכן נקבל את הדרוש. *מש"ל*

שאלה 3:

א. הוכח כי $\det\begin{pmatrix}A^T & 0\\ B & C^T\end{pmatrix}=|A|\cdot|C|$, כאשר $A\in\mathbb{F}^{n\times n},B\in\mathbb{F}^{m\times n},C\in\mathbb{F}^{m\times m}$.

פתרון:

נזכר במסקנה מההרצאה כי $|A^T|=|A|$ ונעזר בתזכורת:

$$\det\begin{pmatrix}A^T & 0\\ B & C^T\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}A^T & 0\\ B & C^T\end{pmatrix}^T=\det\begin{pmatrix}A & B^T\\ 0 & C\end{pmatrix}=|A|\cdot|C|.$$ *מש"ל*

ב. הוכח או הפרך: $\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=|A|\cdot|D|-|B|\cdot|C|$.

<u>פתרון:</u>

נפריך על ידי דוגמא נגדית.

תהיינה $B = C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A = D = I$, אזי

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right|}_{I_1} - \underbrace{\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right|}_{I_2}$$

$$= \underbrace{\left[1\cdot 1 - 1\cdot(-1)\right]}_{I_1} - \underbrace{(-1)\left[1\cdot 1 - 1\cdot(-1)\right]}_{I_2} = 4$$

ומצד שני $|A|\cdot|D| - |B|\cdot|C| = 1\cdot 1 - 1\cdot 1 = 0 \neq 4$.

ג. חשב את הדטרמיננטה של המטריצה $\begin{pmatrix} 12 & 0 & -8 & 34 & -5 \\ 3 & 0 & -1 & 13 & -2 \\ 18 & 2 & 26 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

<u>פתרון:</u>

נעזר בתזכורת, $\det\begin{pmatrix} 12 & 0 & -8 & 34 & -5 \\ 3 & 0 & -1 & 13 & -2 \\ 18 & 2 & 26 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 0 & -8 \\ 3 & 0 & -1 \\ 18 & 2 & 26 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$ ונפתח לפי עמודה 2:

$$\begin{vmatrix} 12 & 0 & -8 \\ 3 & 0 & -1 \\ 18 & 2 & 26 \end{vmatrix} = (-2)\left[12\cdot(-1) - (-8)\cdot 3\right] = -24, \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 7\cdot 3 - 4\cdot 5 = 1$$

$\Leftarrow \det(\bullet) = (-24)\cdot 1 = -24$.

שאלה 4:

יהא n אי-זוגי, הוכח שאם $char(\mathbb{F}) \neq 2$ דטרמיננטה של כל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ אנטי-סימטרית ($A = -A^T$) שווה ל- 0.

<u>הוכחה:</u>

בהרצאה ראינו כי $|A| = \left|A^T\right|$, ולפי הנתון $|-A| = \left|A^T\right|$. על כן $|A| = |-A|$. כזכור $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$, כלומר $|A| = |-A| = (-1)^n \cdot |A|$. נתון כי n אי-זוגי ולכן $|A| = -|A|$.

נעזר בנתון $char(\mathbb{F}) \neq 2$ כדי להסיק $|A| = 0$. *מש"ל*

שאלה 5:

נגדיר $A_3=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & -1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ -1 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0 & -1\\ 0 & \lambda & -1 & 0\\ 0 & -1 & \lambda & 0\\ -1 & 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}$, ובאופן דומה נגדיר

$A_n=\lambda I-\begin{pmatrix}0 & & -1\\ & \iddots & \\ -1 & & 0\end{pmatrix}$.

א. חשב את הדטרמיננטות של A_3, A_4.

<u>פתרון:</u>

$$\det\left(A_3\right)=\lambda\left(\lambda-1\right)\lambda-\left(-1\right)\left(\lambda-1\right)\left(-1\right)=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1$$

$$\det\left(A_4\right)=\lambda^4+\left(-1\right)^4-\lambda\left(-1\right)^2\lambda-\left(-1\right)\lambda^2\left(-1\right)=\lambda^4-2\lambda^2+1$$

ב. חשב את הדטרמיננטה של A_{2n}.

<u>פתרון:</u>

$$\det\left(A_{2n}\right)=\lambda^{2n}+\left(-1\right)^{2n}-\lambda^{n-1}\left(-1\right)^2\lambda^{n-1}-\left(-1\right)^{n-1}\lambda^2\left(-1\right)^{n-1}=\lambda^{2n}-2\lambda^{2n-2}+1$$

ג. חשב את הדטרמיננטה של A_{2n-1}, והסק מהם ערכי λ שעבורם היא הפיכה.

<u>פתרון:</u>

$$\det\left(A_{2n-1}\right)=\lambda^{n-1}\left(\lambda-1\right)\lambda^{n-1}-\left(-1\right)^{n-1}\left(\lambda-1\right)\left(-1\right)^{n-1}=\lambda^{2n-1}-\lambda^{2n-2}-\lambda+1 .$$

A_{2n-1} הפיכה אם ורק אם $\det\left(A_{2n-1}\right)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda^{2n-1}-\lambda^{2n-2}-\lambda+1\neq 0$.

נבדוק מתי הדטרמיננטה מתאפסת:

$$\lambda^{2n-1}-\lambda^{2n-2}-\lambda+1=\lambda^{2n-2}\left(\lambda-1\right)-\left(\lambda-1\right)=\left(\lambda^{2n-2}-1\right)\left(\lambda-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda=1\vee\lambda^{2n-2}=1\Leftrightarrow\lambda=\pm1$$

על A_{2n-1} הפיכה עבור $\lambda\neq\pm1$.