תרגיל:

תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ממשית סימטרית.
הוכיחו כי קיימת מטריצה $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $A = B^3$

פתרון.

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה ממשית סימטרית ולכן ניתנת ללכסון אורתוגונאלי (לפי משפט הלכסון האורתוגונאלי) והע"ע שלה ממשיים לפי מה שהוכחנו.

לכן, קיימות מטריצות $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אורתוגונאלית ו $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ אלכסונית שהע"ע של A נמצאים על האלכסון שלה $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ כך שמתקיים $A = PDP^t$.

היות ולכל מס' ממשי יש שורש שלישי (גם למספרים שליליים!) הרי קיימת מטריצה שנקרא לה * D ונגדיר אותה כך : $D^* = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[3]{\lambda_n} \end{pmatrix}$. לפי זה מתקיים ש $(D^*)^3 = D$.

עכשיו שימו לב : נגדיר $B = PD^*P^t$ **. בגלל ש** $P^tP = I$ **וכן בגלל ש** $(D^*)^3 = D$

$$B^3 = \left(PD^*P^t\right)^3 = \left(PD^*P^t\right)\left(PD^*P^t\right)\left(PD^*P^t\right) = P(D^*)^3P^t = PDP^t = A$$