תגבור – משוואות דיפרנציאליות

שיטת הפרדת משתנים

משוואה דיפרנציאלית מהצורה $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$

$\left(f_1(x)\neq 0, g_1(y)\neq 0, f_2(x)\neq 0, g_2(y)\neq 0\right)$ נפתור בעזרת השיטה הנ"ל.

דרך לפתרון

$$f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0\Rightarrow\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=0\Rightarrow\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=c$$

תרגיל

מצא פונקציה העוברת דרך הנקודה $(1,1)$ ומקיימת $y'=\frac{-x}{y+1}$.

פתרון

נרשום תחילה את המשוואה: $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y+1}\Rightarrow(y+1)dy+xdx=0.$$

כעת נפתור את המשוואה בעזרת שיטת הפרדת המשתנים.

$$(y+1)dy+xdx=0\Rightarrow\int(y+1)dy+\int xdx=0\Rightarrow\frac{y^2}{2}+y+\frac{x^2}{2}=c.$$

נתון שהפונקציה עוברת דרך הנקודה $(1,1)$ ולכן ניתן למצוא את הקבוע c.

$$\frac{1^2}{2}+1+\frac{1^2}{2}=c\Rightarrow c=2.$$

$$\frac{y^2}{2}+y+\frac{x^2}{2}=2.$$

משוואה הומוגנית

המשוואה $y'=f(x,y)$ נקראת משוואה הומוגנית אם $f(tx,ty)=f(x,y)$.

דוגמא

המשוואה $y'=\frac{(x+y)^2}{xy}$ הומוגנית.

$$f(x,y)=\frac{(x+y)^2}{xy}\Rightarrow f(tx,ty)=\frac{(tx+ty)^2}{tx\cdot ty}\Rightarrow f(tx,ty)=\frac{t^2(x+y)}{t^2xy}$$

$$f(tx,ty)=\frac{(x+y)^2}{xy}\Rightarrow f(tx,ty)=f(x,y)$$

דרך לפתרון

נציב $y=ux$ ואז $y'=u'x+u\Rightarrow u'x+u=f(x,ux)\Rightarrow u'x+u=f(1,u)$ ופותרים בשיטת הפרדת המשתנים.

תרגיל

פתור את המשוואה הדיפרנציאלית $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$.

פתרון

$y'=\frac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x}$ נוכיח שהמשוואה הומוגנית.

$$f(tx,ty)=\frac{\sqrt{(tx)^2-(ty)^2}+ty}{tx} \Leftarrow f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2-y^2}+y}{x}$$

ואז $f(x,y)=f(tx,ty)$.

נציב $y=ux$ ואז $u'x+u=f(1,u) \Leftarrow u'x+u=f(x,ux) \Leftarrow y'=u'x+u$

ז"א $u'x=\sqrt{1-u^2} \Leftarrow u'x+u=\frac{\sqrt{1-u^2}+u}{1}$

נפתור את המשוואה $u'x=\sqrt{1-u^2}$ בעזרת הפרדת המשתנים

$$u=\sin(\ln(cx)) \Leftarrow \arcsin u=\ln(cx) \Leftarrow \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x} \Leftarrow \frac{du}{dx}x=\sqrt{1-u^2}$$

נציב חזרה ונקבל $u=\sin(\ln(cx)) \Rightarrow \frac{y}{x}=\sin(\ln(cx)) \Rightarrow y=x\sin(\ln(cx))$

<u>משוואה ליניארית מסדר ראשון</u>

משוואה ליניארית מסדר ראשון היא משוואה מהצורה $y'+p(x)y=q(x)$.

כאשר $q(x)=0$ נאמר שהמשוואה הומוגנית. ז"א $y'+p(x)y=0$.

<u>פתרון משוואה ליניארית הומוגנית מסדר ראשון</u>

$$y'+p(x)y=0$$
$$\frac{dy}{dx}=-p(x)y$$
$$\frac{dy}{y}=-p(x)dx$$
$$\ln y=-\int p(x)dx+c$$
$$y=c_1e^{-\int p(x)dx}$$

<u>דוגמא</u>

$$y'-y\sin x=0$$
$$y'=y\sin x$$
$$\frac{dy}{dx}=y\sin x$$
$$\frac{dy}{y}=\sin xdx$$
$$\ln y=-\cos x+c$$
$$y=c_1e^{-\cos x}$$

<u>משפט</u>

כל פתרון של משוואה לא הומוגנית הוא סכום פתרון כללי של משוואה הומוגנית ופתרון פרטי של משוואה לא הומוגנית.

<u>דרך לפתרון משוואה לא הומוגנית מסדר ראשון</u>

שלב א: נמצא פתרון כללי של המשוואה ההומוגנית.

שלב ב: נמצא בעזרת ניחוש פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית.
שלב ג: נחבר את התשובות שקיבלנו בשלבים הקודמים.

__דוגמא__

$$y'+\frac{y}{x}=3x$$

__פתרון__

שלב א: נמצא פתרון למשוואה ההומוגנית $y'+\frac{y}{x}=0$

$$y'=-\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow\ln y=-\ln x+\ln c\Rightarrow y=\frac{c}{x}$$

שלב ב: נשים לב ש $y_p=x^2$ מהווה פתרון למשוואה הלא הומוגנית

שלב ג: הפתרון הכללי הוא $y=\frac{c}{x}+x^2$

ניתן למצוא את הפתרון הכללי גם ללא ניחוש אלא בשיטת וריאציית המקדמים.
נרשום את הקבוע בפתרון של המשוואה ההומוגנית כמשתנה של x ונציב במשוואה הלא הומוגנית

$$y=\frac{c(x)}{x}\Rightarrow y'=\frac{xc'(x)-c(x)}{x^2}\Rightarrow\frac{xc'(x)-c(x)}{x^2}+\frac{c(x)}{x^2}=3x\Rightarrow\frac{c'(x)}{x}=3x$$

$$c'(x)=3x^2\Rightarrow c(x)=x^3\Rightarrow y=x^2$$

וקיבלנו פתרון פרטי גם ללא שיטת הניחוש.

__תרגיל__

פתור את המשוואה $y'-y\sin x=\sin x\cos x$.

__פתרון__

ראינו מקודם שהפתרון של המשוואה $y'-y\sin x=0$ הוא $y=ce^{-\cos x}$.

נמצא בעזרת וריאציית המקדמים פתרון פרטי למשוואה $y'-y\sin x=\sin x\cos x$.

$$y=c(x)e^{-\cos x}\Rightarrow y'=c'(x)e^{-\cos x}+c(x)\sin xe^{-\cos x}$$

נציב במשוואה ונקבל

$$c'(x)e^{-\cos x}+c(x)\sin xe^{-\cos x}-c(x)\sin xe^{-\cos x}=\sin x\cos x$$

$$c'(x)=\sin x\cos xe^{\cos x}\Rightarrow c(x)=-\cos xe^{\cos x}+e^{\cos x}$$

הפתרון הפרטי הוא $y=\left(-\cos xe^{\cos x}+e^{\cos x}\right)e^{-\cos x}\Rightarrow y=-\cos x+1$.

הפתרון הכללי הוא $y=ce^{-\cos x}-\cos x+1$.

__תרגיל__

פתור את המשוואה $y'+\tan y=\frac{x}{\cos y}$.

__פתרון__

נציב $t=\sin y\Rightarrow t'=y'\cos y$

$$t'+t=x\Leftarrow y'\cos y+\sin y=x\Leftarrow y'+\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{x}{\cos y}$$

קיבלנו משוואה שאנו יודעים לפתור $t=ce^{-x}+x-1$ ואז $y=\arcsin\left(ce^{-x}+x-1\right)$.

__הערה__

פתרון שלא ניתן להגיע אליו בעזרת הפתרון הכללי נקרא פתרון סינגולארי.

__דוגמא__

$y'=-2xy^2$

נמצא פתרון כללי למשוואה

$-\frac{y'}{y^2}=2x$ נציב $t=\frac{1}{y} \Leftarrow t'=-\frac{y'}{y^2} \Leftarrow t'=2x \Leftarrow t=x^2+c \Leftarrow y=\frac{1}{x^2+c}$.

נשים לב ש $y=0$ הוא גם פתרון של המשוואה אבל לא ניתן להגיע אליו מהפתרון הכללי ולכן הוא פתרון סינגולארי.

<u>משוואת ברנולי</u>

משוואת ברנולי היא משוואה מהצורה $y'+p(x)y=q(x)y^n$ כאשר $n\neq 0,1$.

במקרה זה נציב $z=\frac{1}{y^{n-1}} \Leftarrow z'=\frac{(1-n)\cdot y'}{y^n}$.

נחלק את המשוואה ב y^n נקבל $\frac{y'}{y^n}+\frac{p(x)y}{y^n}=q(x)$ ואז $\frac{z'}{1-n}+p(x)z=q(x)$ קיבלנו

משוואה ליניארית שאנחנו יודעים לפתור.

<u>תרגיל</u>

פתור את המשוואה $y'-2xy=3x^3y^2$.

<u>פתרון</u>

נשים לב שזו משוואת ברנולי כאשר $n=2$.

נחלק ב y^2 ונקבל $\frac{y'}{y^2}-\frac{2x}{y}=3x^3$ נציב $z=\frac{1}{y} \Leftarrow z'=-\frac{y'}{y^2}$ ואז נקבל את המשוואה

$-z'-2xz=3x^3 \Leftarrow z'+2xz=-3x^3$.

קיבלנו משוואה ליניארית לא הומוגנית מסדר ראשון.

נפתור את המשוואה ההומוגנית

$$z'+2xz=0 \Leftarrow z'=-2xz \Leftarrow \frac{dz}{dx}=-2xz \Leftarrow \frac{dz}{z}=-2xdx \Leftarrow z=ce^{-x^2}$$

נמצא פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית.

נרשום את הקבוע בפתרון של המשוואה הלא הומוגנית כפונקציה של x ונקבל

$$z=c(x)e^{-x^2} \Leftarrow z'=c'(x)e^{-x^2}-2xc(x)e^{-x^2}$$

נציב במשוואה הלא הומוגנית

$$c'(x)e^{-x^2}-2xc(x)e^{-x^2}+2xc(x)e^{-x^2}=-3x^3$$

$$c'(x)=-3x^2e^{x^2} \Rightarrow c(x)=\frac{-3}{2}x^2e^{x^2}+\frac{3}{2}e^{x^2}$$

כאשר את האינטגרל פתרנו ע"י אינטגרציה בחלקים.

נציב את $c(x)$ שקיבלנו במשוואה בפתרון המשוואה ההומוגנית ונקבל פתרון פרטי למשוואה הלא הומוגנית.

$$z_p=\left(-\frac{3}{2}x^2e^{x^2}+\frac{3}{2}e^{x^2}\right)e^{-x^2} \Rightarrow z_p=-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}$$

$$z=ce^{-x^2}-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}$$

מכיוון שהצבנו $z=\frac{1}{y}$ נקבל $y=\frac{2}{2ce^{-x^2}-3x^2+3}$

<u>משוואה מדויקת</u>

למשוואה $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ קוראים משוואה מדוייקת אם האגף השמאלי של המשוואה מייצג דיפרנציאל שלם של פו' כלשהי.

<u>משפט אוילר</u>

המשוואה $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ מדויקת אם ורק אם $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial M}{\partial y}$.

<u>דרך לפתרון משוואה מדויקת</u>

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0,\ du=M(x,y)dx+N(x,y)dy \Rightarrow u(x,y)=c$$

מטרה לחשב את $u(x,y)$.

מכיון ש $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$ נקבל ש

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$$

ואז $(1)u(x,y)=\int M(x,y)dx+c(y)$

נגזור לפי y ונקבל $\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx+c(y)\right)=N(x,y)$

$$\frac{\partial\int M(x,y)dx}{\partial y}+c'(y)=N(x,y)$$

ואז

$$c'(y)=-\frac{\partial\int M(x,y)dx}{\partial y}+N(x,y)$$

מכיוון שזו משוואה מדויקת נקבל שהאגף הימני של המשוואה תלוי ב y בלבד ולכן נוכל למצוא את $c(y)$. נציב ב (1) ונקבל $u(x,y)$ נשווה לקבוע ונקבל את הפתרון.

<u>תרגיל</u>

$$\left(3x^2+6xy^2\right)dx+\left(6x^2y+4y^3\right)dy=0$$

נבדוק שהמשוואה מדויקת

$$M(x,y)=3x^2+6xy^2,\ N(x,y)=6x^2y+4y^3$$
$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=12xy,\ \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=12xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+6xy^2$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2y+4y^3$$

ואז $u(x,y)=\int\left(3x^2+6xy^2\right)dx+c(y)$

נקבל ש $u(x,y)=x^3+3x^2y^2+c(y)$.

נגזור לפי y ונקבל

$$6x^2y+4y^3=6x^2y+c'(y)$$
$$c'(y)=4y^3$$
$$c(y)=y^4$$

נציב חזרה ונקבל $u(x,y)=x^3+3x^2y^2+y^4$.

הפתרון הוא $x^3+3x^2y^2+y^4=c$.

<u>גורם אינטגרציוני</u>

בהינתן משוואה דיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ נמצא פונקציה μ כך שהמשוואה $\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy=0$ תהייה משוואה מדויקת.

שיטה זו נקראת שיטת גורם אינטגרציוני.

הערה: לא תמיד ניתן לפתור את המשוואה הלא מדויקת בצורה זאת.

כדי שהמשוואה $\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy=0$ תהייה מדויקת צריך להתקיים

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\Leftarrow\frac{\partial\mu}{\partial y}\cdot M+\frac{\partial M}{\partial y}\cdot\mu=\frac{\partial\mu}{\partial x}\cdot N+\frac{\partial N}{\partial x}\cdot\mu.$$

<u>תרגיל</u>

פתור בעזר שיטת הגורם האינטגרציוני את המשוואה $(1-x^2y)dx+x^2(y-x)dy=0$

אם ידוע שהגורם האינטגרציוני μ היא פונקציה של x בלבד.

<u>פתרון</u>

מכיוון שהגורם האינטגרציוני μ היא פונקציה של x בלבד נקבל ש $\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$ נציב המשוואה

שקיבלנו קודם ונקבל $\frac{\partial M}{\partial y}\cdot\mu=\frac{\partial\mu}{\partial x}\cdot N+\frac{\partial N}{\partial x}\cdot\mu$.

$\frac{\partial M}{\partial y}=-x^2,\frac{\partial N}{\partial x}=2xy-3x^2$ נציב במשוואה ונקבל

$$-x^2\mu=\frac{\partial\mu}{\partial x}\left(x^2y-x^3\right)+\left(2xy-3x^2\right)\cdot\mu\Rightarrow\left(2x^2-2xy\right)\mu=\frac{\partial\mu}{\partial x}\left(x^2y-x^3\right)$$

$$2x(x-y)\mu=\frac{\partial\mu}{\partial x}\left(-x^2\right)(x-y)\Rightarrow 2x\mu=-x^2\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial\mu}{\mu}=-\frac{2}{x}\partial x$$

$$\ln\mu=-2\ln x\Rightarrow\ln\mu=\ln\frac{1}{x^2}\Rightarrow\mu=\frac{1}{x^2}$$

הגורם האינטגרציוני הוא $\frac{1}{x^2}$ ואז המשוואה $\left(\frac{1}{x^2}-y\right)dx+(y-x)dy=0$ היא מדוייקת.

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x^2}-y\\ \frac{\partial u}{\partial y}=y-x\end{cases}\Rightarrow u(x,y)=-\frac{1}{x}-yx+c(y)\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=-x+c'(y)\Rightarrow y-x=-x+c'(y)$$

ולכן $c'(y)=y\Rightarrow c(y)=\frac{y^2}{2}$ נציב חזרה ונקבל $c=-\frac{1}{x}-yx+\frac{y^2}{2}$.

<u>מערכת משוואות</u>

מטרה לפתור מערכת משוואות ליניאריות מהצורה

$$\begin{cases} y_1'=\sum_{l=1}^{n} a_{1l}y_l \\ . \\ . \\ . \\ y_n'=\sum_{l=1}^{n} a_{nl}y_l \end{cases}$$

דוגמא למערכת משוואות

$$\begin{cases} y_1'=2y_1-3y_2+5y_3 \\ y_2'=-1y_1-4y_2+7y_3 \\ y_3'=4y_1-5y_2+8y_3 \end{cases}$$ ואז $$\begin{matrix} a_{11}=2, a_{12}=-3, a_{13}=5, a_{21}=-1, a_{22}=-4 \\ a_{23}=7, a_{31}=4, a_{32}=-5, a_{33}=8 \end{matrix}$$

דרך לפתרון

הפתרונות הם מהצורה

$y_1=\beta_1 e^{\lambda x}, y_2=\beta_2 e^{\lambda x},..., y_n=\beta_n e^{\lambda x} \Rightarrow y_1'=\lambda\beta_1 e^{\lambda x}, y_2'=\lambda\beta_2 e^{\lambda x},..., y_n'=\lambda\beta_n e^{\lambda x}$.

נציב במערכת המשוואות ונקבל

$$\begin{cases} \lambda\beta_1 e^{\lambda x}=\sum_{l=1}^{n} a_{1l}\beta_l e^{\lambda x} \\ . \\ . \\ . \\ \lambda\beta_n e^{\lambda x}=\sum_{l=1}^{n} a_{nl}\beta_l e^{\lambda x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda\beta_1-\sum_{l=1}^{n} a_{1l}\beta_l=0 \\ . \\ . \\ . \\ \lambda\beta_n-\sum_{l=1}^{n} a_{nl}\beta_l=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\lambda-a_{11})\beta_1+a_{12}\beta_2+....+a_{1n}\beta_n=0 \\ . \\ . \\ . \\ a_{11}\beta_1+a_{12}\beta_2+....+(\lambda-a_{1n})\beta_n=0 \end{cases}$$

למערכת המשוואות הנ"ל יהיו פתרונות לא טרויאלים רק כאשר הדטרמיננטה שח המקדמים תהייה אפס.

מסקנה יש למצוא את הערכים העצמיים של מטריצת המקדמים.

<u>**תרגיל**</u>

פתור את מערכת המשוואות $\begin{cases} y'=y-z \\ z'=-4y+4z \end{cases}$

נמצא את הערכים העצמיים של מטריצת המקדמים $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda_1=0, \lambda_2=5$

נמצא את β_1,β_2 עבור $\lambda=0$ ונקבל $\begin{cases} \beta_1-\beta_2=0 \\ -4\beta_1+4\beta_2=0 \end{cases} \Rightarrow \beta_1=\beta_2$

נמצא את β_1,β_2 עבור $\lambda=5$ ונקבל $\begin{cases} -4\beta_1-\beta_2=0 \\ -4\beta_1-\beta_2=0 \end{cases} \Rightarrow \beta_2=-4\beta_1$

סה"כ הפתרון הוא

$$y=c_1+c_2e^{5x}$$

$$z=c_1-4c_2e^{5x}$$

<u>תרגיל</u>

פתור את מערכת המשוואות $\begin{cases} y' = 5y - 4z \\ z' = 9y + 5z \end{cases}$

<u>פתרון</u>

נמצא את הערכים העצמיים $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 9 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 5 \pm 6i$

נמצא את β_1, β_2 עבור $\lambda = 5 + 6i$

נקבל את מערכת המשוואות $\begin{cases} -6i\beta_1 - 4\beta_2 = 0 \\ 9\beta_1 - 6i\beta_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3\beta_1 i = -2\beta_2$

$\beta_1 = 2i, \beta_2 = 3$

$$\begin{matrix} y = 2ie^{5x}\left(\cos(6x) + i\sin(6x)\right) \\ z = 3e^{5x}\left(\cos(6x) + i\sin(6x)\right) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y = e^{5x}\left(-2\sin(6x) + 2i\cos(6x)\right) \\ z = e^{5x}\left(3\cos(6x) + 3i\sin(6x)\right) \end{matrix}$$

תשובה

$$y = -2c_1 e^{5x}\sin(6x) + 2c_2 e^{5x}\cos(6x)$$
$$z = 3c_1 e^{5x}\cos(6x) + 3c_2 e^{5x}\sin(6x)$$

<u>תרגיל</u>

פתור את מערכת המשוואות $\begin{cases} y' = 5y + z \\ z' = -y + 3z \end{cases}$

<u>פתרון</u>

נמצא את הערכים העצמיים

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)(3-\lambda) + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \Rightarrow (\lambda-4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 4$$

ולכן הפתרון הוא מהצורה $y = c_1 e^{4x} + c_2 xe^{4x} \Rightarrow y' = 4c_1 e^{4x} + c_2 e^{4x} + 4c_2 xe^{4x}$

$\Rightarrow z' = 4c_3 e^{4x} + c_4 e^{4x} + 4c_4 xe^{4x}$ $z = c_3 e^{4x} + c_4 xe^{4x}$

מהמשוואה הראשונה נקבל
$$4c_1 e^{4x} + c_2 e^{4x} + 4c_2 xe^{4x} = 5c_1 e^{4x} + 5c_2 xe^{4x} + c_3 e^{4x} + c_4 xe^{4x}$$
$$-c_1 + c_2 - c_3 = (c_2 + c_4)x \Rightarrow c_4 = -c_2, c_3 = -c_1 + c_2$$

תשובה

$$\begin{cases} y = c_1 e^{4x} + c_2 xe^{4x} 3 \\ z = (c_2 - c_1)e^{4x} - c_2 xe^{4x} \end{cases}$$