תרגול 5 - מרחבי L^p, התכנסות במומנט ואי־שיוויונים - תשע"ט

20 במרץ 2019

- **<u>תזכורת מהקורס באנליזה מודרנית (תורת המידה)</u>**

1. **<u>הגדרה</u>** ־ יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ (נניח $\mathbb{R}$). נורמה על V היא פונקציה
$||\cdot|| : V \to [0,\infty]$
כך ש ־

$$\forall_{v_1,v_2\in V}\forall_{\alpha\in\mathbb{F}}(||v|| \geq 0)\wedge(||\alpha v|| = |\alpha|\cdot||v||)\wedge(||v_1+v_2|| \leq ||v_1||+||v_2||)$$

. כלומר הזוג $(V,||\cdot||)$ מרחב נורמי.

2. **<u>הגדרה</u>** ־ יהי $(V,||\cdot||)$ מרחב נורמי, ותהי $\{f_n\}$ סדרה של איברים ב־ V. אז עבור $f \in V$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ אם:

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{n>N}||f_n - f|| < \epsilon$$

3. **<u>הגדרה</u>** ־ סדרה של איברים $\{f_n\}$ ב־ V נקראת סדרת קושי אם

$$\forall_{\epsilon>0}\exists_{N\in\mathbb{N}}\forall_{m,n>N}||f_n - f_m|| < \epsilon$$

.

4. **<u>הערה</u>** ־ כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי, אבל לא תמיד ההיפך. אם במרחב V כל סדרת קושי היא מתכנסת אז הוא מרחב שלם.

5. **<u>הערה</u>** ־ מרחב נורמי שלם נקרא מרחב בנך. (מרחב הילברט הוא מרחב מכפלה פנימית שלם).

6. **הגדרה (כללית)** - יהי $(V,\mathcal{O},\mathcal{L})$ מרחב מידה חיובי. עבור $1 \le p < \infty$ נגדיר את L^p להיות אוסף כל הפונקציות המדידות $f: V \to \mathbb{F}$ כך ש-

$$||f||_p = (\int\limits_V |f|^p d\mathcal{L})^{\frac{1}{p}} < \infty$$

(נזכור שב- L^p הפונקציות הן מחלקות שקילות של פונקציות מדידות השוות כמעט בכל מקום. אחרת, L^pלא יהיה מוגדר כמרחב נורמי).

- **הגדרת התכנסות ב-** L^p

1. נאמר כי $X_n \xrightarrow{L^p} X$ $(1 \le p < \infty)$ אם $\forall_n ||X_n||_p < \infty$ וכן, $||X||_p < \infty$ מקיימים

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^p|] = \mathbb{E}[|X|^p|]$$

(X_n מתכנס במומנט ה- p).

2. **תרגיל**

יהי $X_n \sim U(0,\frac{1}{n})$ הראו כי $\forall_{r\ge1} X_n \xrightarrow{L^p} 0$.

פתרון

אם $X_n \sim U(0,\frac{1}{n})$ אזי מתקיים

$$f_{X_n}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\frac{1}{n}-0} & t \in [0,\frac{1}{n}] \\ 0 & else \end{cases}$$

נחשב $\mathbb{E}[|X_n - 0|^r] = \int_0^{\frac{1}{n}} t^r \cdot n \cdot dt = \frac{1}{(r+1)n^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ לכל $r \ge 1$.

3. **תרגיל**

יהיו $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ משתנים מקריים כך ש-

$$X_n(\omega) = \begin{cases} n^2 & in\, probability\, \frac{1}{n} \\ 0 & in\, probability\, 1-\frac{1}{n} \end{cases}$$

הוכח:

(א) $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

פתרון

נחשב :

$$\forall_{\epsilon>0} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n| \ge \epsilon) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = n^2) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

(ב) לכל $r \geq 1$ X_n אינו מתכנס במומנט ה־ r.

פתרון

יהי $r \geq 1$. נחשב:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n|^r] = \lim_{n\to\infty}((n^2)^r \cdot \frac{1}{n} + 0 \cdot (1-\frac{1}{n})) = \lim_{n\to\infty} n^{2r-1} = \infty$$

4. <u>**מסקנה:**</u>

(א) אם $X_n \xrightarrow{L_p} X$ אז מההרצאה ראינו כי $X_n \xrightarrow{p} X$

(ב) מתהרגיל נקבל כי אם $X_n \xrightarrow{p} X$ אז לא תמיד כי $X_n \xrightarrow{L_p} X$

- <u>**שונות, שונות משותפת ואי־שיוויונים**</u>

1. תזכורת מהקורס "מבוא להסתברות". יהי X משתנה מקרי במרחב הסתברות $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(א)

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

(ב)

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

(ג) אם $X, Y \in L^2$ נגדיר את השונות המשותפת שלהם להיות:

$$Cov[X,Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

i. $Cov[aX, Y] = aCov[X, Y]$

ii. $Cov[X, X] = Var[X]$

iii. $Cov[X,Y]=Cov[Y,X]$

(ד) $X,Y\in L^2$ משתנים מקריים בלתי מתואמים אם $Cov[X,Y]=0$.

(ה) $Cov(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{j=1}^{m}Y_i)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}Cov(X_i,Y_j)$

(ו) $Var(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)+2\cdot\sum_{0\le i<j\le 1}Cov(X_i,X_j)$

- <u>**משתנים מקריים ואי שיוויונים**</u>

1. **מההרצאה:** יהיו $X,Y\in L^2$ בלתי תלויים. אזי X,Y משתנים מקריים בלתי מתואמים.
2. **תרגיל:** יהיו $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ משתנים מקריים ב־ L^2 כך ש־ $\forall_n\mathbb{E}[X_n]=0\wedge Var[X_n]<\infty$. הראה כי
אם $\lim\limits_{n\to\infty}Var[X_n]=0$ אז מתקיים $X_n\overset{L^2}{\to}0$.
פתרון:
יש להראות על פי הגדרה כי $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n^2]=0$ כמו כן, על פי הנתונים:
אבל $\lim\limits_{n\to\infty}Var[X_n]=\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n^2]-(\mathbb{E}[X_n])^2=\lim\limits_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n^2]=0$.
והוכחנו את הדרוש.
3. <u>הגדרה: אי־שיוויון קושי שוורץ</u>
יהיו $X,Y\in L^2$ משתנים מקריים. אזי: $(Cov[X,Y])^2\le Var[X]Var[Y]$
4. <u>הגדרה: אי שיוויון מרקוב:</u>
יהי $X:\Omega\to\mathbb{R}$ משתנה מקרי. ויהי $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ פונקציה מונוטונית עולה. אזי:
$\forall_{a>0}\mathbb{P}(|X|\ge a)\le\frac{\mathbb{E}(f(|X|))}{f(a)}$ ($a>0\Rightarrow f(a)>0$). מקרה פרטי מוכר של אי השיוויון כאשר $f=Id_{\mathbb{R}}$.
5. <u>הגדרה: אי שיוויון צ'בישב</u>
יהי $X:\Omega\to\mathbb{R}$ כך ש־ $X\in L^2$. אזי מתקיים :
$\forall_{a>0}\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}[X]|\ge a)\le\frac{Var[X]}{a^2}$
6. **תרגיל:** יהיו $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ משתנים מקריים בלתי מתואמים בעלי תוחלת 0 ושונות 1. הוכיחו:

$$\forall_{n\ge1}\mathbb{P}(|\sum_{j=1}^{n}X_j|\ge n)\le\frac{1}{n}$$

פתרון

נשים לב כי $\{X_j\}_{j=1}^{\infty}$ משתנים מקריים בלתי מתואמים. אזי

$$Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\cdot \sum_{0\le i<j\le 1} Cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = n$$

לכן, סה"כ מתקיים $Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = n$. לכן, נשתמש באי שיוויון צ'בישב ונבחר $a = n$.

מתקיים : $\mathbb{P}[|\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} X_i]| \ge n] = \mathbb{P}[|\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]| \ge n] =$
$\mathbb{P}[|\sum_{i=1}^{n} X_i| \ge n] \le \frac{1}{n}$