טופולוגיה תרגיל 9 תשע"ז

1.

פתרון: הפרכה:ההפרכה היא למעשה הדוגמא הקלאסית של מרחב קשיר שאינו קשיר מסילתית.

נקח $A = \{(x, \sin\frac{1}{x}) : 0 < x < 1\}$.

$B = \{(0, y) : -1 < y < 1\}$.

אזי AוB קשירים מסילתית, $B \cap \bar{A} \neq \emptyset$, אולם כידוע $A \cup B$ לא קשיר.

2.

פתרון: תהי $A \subsetneq \mathbb{R}$ צפופה.

בפרט, קיים $r \in \mathbb{R} \setminus A$. נסתכל על $A \cap (-\infty, r)$, $A \cap (r, \infty)$.

ברור שזהו פירוק של A, והוא לא טריוויאלי כי A צפופה, כלומר, נחתכת באופן לא ריק עם כל קבוצה פתוחה בR, ולכן הקבוצות לא ריקות.

3.

פתרון:

א. יהיו $\{A_i\}$ מרחבים ממידה 0, ויהיו $\{O_{ji}\}_{j \in J_i}$ הבסיסים הסגוחים שלהם בהתאמה.

ידוע שבסיס לטופולוגית המכפלה הוא קבוצות מהצורה: מכפלה של קבוצות פתוחות במספר סופי מהמקומות, ושל כל המרחב בשאר האינדקסים.

שימו לב שמספיק לקחת: מכפלה של קבוצות פתוחות בסיסיות במספר סופי מהמקומות, ושל כל המרחב בשאר האינדקסים. (חישבו למה זה נכון).

הקבוצות הפתוחות הבסיסיות בכל מרחב הן גם סגורות, ולכן קיבלנו שהבסיס מורכב ממכפלות של קבוצות סגורות.

הוכחנו בכיתה שמכפלה (אפילו אינסופית) של קבוצות סגורות היא סגורה, ולכן הבסיס מורכב מקבוצות סגוחות.

ב.יהיו $\{X_i\}$ מרחבים שכולם totally dissconnected. נסתכל על $A \subseteq \Pi X_i$ כך ש $|A| > 1$ ונוכיח שאינה קשירה.

יש בA לפחות שתי נקודות שונות $(x_i) \neq (y_i)$. נניח שהן שונות ברכיב הk.

נניח שA קשירה. אז ההטלה של A לרכיב הk היא תת קבוצה קשירה של X_k, מגודל גדול מ1. סתירה.

4.

פתרון:

א. נוכיח שA קשירה. ההוכחה לB זהה.

נניח ש$A = U \cup V$ סגורות בA לא ריקות וזרות. אזי $A \cap B = (U \cap B) \cup (V \cap B)$ סגורות ב$A \cap B$ וזרות.

$A \cap B$ קשירה ולכן בה"כ $A \cap B = U \cap B$ ו $V \cap B = \emptyset$.

כעת $A \cup B = V \cup (U \cup B)$ סגורות ב $A \cup B$,לא ריקות וזרות (הן סגורות כי הנון שA וB סגורות במרחב כולו, ולכן גם UוV סגורות במרחב כולו ובפרט ב$A \cup V$). סתירה.

שימו לב שבאופן דומה יכולנו להוכיח במקרה ששתי הקבוצות היו פתוחות.

ב. נקח: $A = [0, 1) \cup [2, 3)$, $B = [1, 2) \cup [3, 4)$.

קל לראות שהחיתוך והאיחוד קשירים שכן $A \cap B = \emptyset$ ו $A \cup B = [0, 4)$. אולם גם A וגם B אינם קשירים.

5. א.

פתרון: לא נכון. ניקח את

$$X = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in (0,1)\} \cup \{(0,0)\}$$

בתור תת מרחב של $\mathbb{R}^2$.זאת עקומת הסינוס של הטפולוגים. ראינו שקבוצה זו אינה קשירה מסילתית. ניקח את

$$A = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in (0,1)\}$$

זה מרכיב קשירות מסילתי שהוא לא גבוצה סגורה (כי $(0,0)$ נקודת הצטברות)

ב.

פתרון: אכן, אם $A \subseteq B$ עבור B קשירה. אז A סגוחה גם בתת הטופולוגיה על B ולכן B לא קשירה אלא אם כן $A = B$. לכן A היא הקבוצה הקשירה הכי גדולה שמיכלה את עצמה כלומר היא מרכיב קישורת.

ג.

פתרון: נגדיר פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ לפי

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

כאמור ראינו שזו קבוצה קשירה ב $\mathbb{R}^2$ אבל f וודאי לא רציפה.

.6

פתרון: כן. ראינו כבר ש X צפוף בתוך ההשלמה שלו X^*. אם X קשיר אז גם $\operatorname{cl} X = X^*$ קשיר כנדרש.

.7

(א) $A = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{Q} \text{ or } y \in \mathbb{Q}\}$

פתרון: כן. נוכיח שקבוצה זו קשירה מסילתית. ניקח $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ ונמצא מסילה שתחבר אותם. אם

$$x_1, y_2 \in \mathbb{Q}$$

אז ניקח את המסילה הפוליגונאלית שהולכת מ (x_1, y_1)ל (x_1, y_2) ואז ל (x_2, y_2).

אם

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$$

אז ניקח את המסילה הפוליגונאלית

$$(x_1, y_1) \to (x_1, 0) \to (x_2, 0) \to (x_2, y_2)$$

ובדומה אם

$$y_1, y_2 \in \mathbb{Q}$$

או

$$x_2, y_1 \in \mathbb{Q}$$

(ב) $B = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Q}\}$
פתרון: לא. $B = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ זאת מכפלה של שתי קבוצות totally disconnected ולכן totally disconnected בעצמה ובוודאי לא קשירה.

(ג) $C = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{Q} \text{ or } x,y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}$. (רמז: זכרו שמספיק למצוא תת קבוצה קשירה וצפופה כדי להוכיח שמרחב הוא קשיר)
פתרון: נוכיח שכל שתי נקודות בתוך $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ הן באותו מרכיב קשירות. זה ייתן לנו מרכיב קשירות צפוף ובכך יוכח שהמרחב הוא קשיר. אז ניקח

$$(x_1, y_1), (x_0, y_0) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

וניקח בתור מסילה את הקו הישר

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$$

נשים לב שהשיפוע רציונאלי וכן y_0 ולכן לכל נקודה בקו הזה, x רציונאלי אם ורק אם y רציונאלי ולכן הקו עובר בתוך C. זה מוכיח ש $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ הוא חלק ממרכיב קשירות מסילתית ולכן חלק ממרכיב קשירות כנדרש.

.8

פתרון: היות ש K_Y קשירה ומכילה את a היא בוודאי מוכלת בקבוצה הקדשירה הגדולה ביותר שמכילה את a הלוא היא K_X.