פיתרון תרגיל בית 10 במתמטיקה בדידה 2
83-118 סמסטר ב' תשע"ו

29 במאי 2016

1. פתור את נוסחת הנסיגה הבאה: $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 2^{n-1}, a_0 = 1, a_1 = 3$.

פיתרון התוספת הלא הומוגנית היא $\frac{1}{2} \cdot 2^n$. לפולינום האופייני (כך קוראים לו) של הנוסחא, $x^2 - x - 2$, יש שני שורשים: $2, -1$. כיוון ש־2 הוא שורש נצפה בפיתרון לתוספת של $\gamma \cdot n \cdot 2^n$. איך נמצא את γ? נסמן $a_n = \gamma n 2^n$, ונציב בנוסחא המקורית:

$$\gamma n 2^n = \gamma(n-1)2^{n-1} + 2\gamma(n-2)2^{n-2} + 2^{n-1}$$

נחלק ב־2^{n-1} ונקבל:

$$2n\gamma = \gamma(n-1) + \gamma(n-2) + 1 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{3}$$

כעת נפתור את הנוסחא ההומוגנית: צורת הפיתרון של הנוסחא ההומוגנית היא $a_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$, ולכן צורת הפיתרון הכללי תהיה

$$a_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n + \frac{1}{3} \cdot n 2^n$$

כדי למצוא את α, β, נציב בפיתרון הכללי $0, 1$:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\alpha - \beta + \frac{2}{3} = 3 \end{cases}$$

ונקבל $\alpha = \frac{10}{9}, \beta = -\frac{1}{9}$. ולסיכום נקבל

$$a_n = \frac{10}{9} \cdot 2^n - \frac{1}{9} \cdot (-1)^n + \frac{1}{3} \cdot n \cdot 2^n$$

2. כידוע, קו ישר מחלק את המישור לשני אזורים נפרדים. נסמן ב־a_n, את מספר האזורים המתקבלים מ־n ישרים העוברים במישור, כך שכל זוג ישרים נחתכים, ואין שלושה ישרים הנחתכים בנקודה אחת. מצא את הביטוי המפורש ל־a_n. הדרכה: מצא תחילה נוסחת נסיגה.

פיתרון נתבונן ב־n הישרים כ־$n-1$ ישרים ועוד ישר אחד. הישר החדש מפצל כל אזור שהוא עובר בו לשני אזורים. השאלה היא: דרך כמה אזורים הוא עובר?

הישר ה־n חותך $n-1$ ישרים. נשים לב ש־$n-1$ ישרים אלה חוצצים בין n אזורים. לכן נקבל שהישר עובר ב־n אזורים ומפצל כל אחד מהם ל־2, כלומר מוסיף עוד n אזורים חדשים. לכן נוסחת הנסיגה המתקבלת היא

$$a_n = a_{n-1} + n$$

כאשר תנאי ההתחלה הוא $a_0 = 1$ (אם אין ישרים אז יש אזור אחד). אם נפתח את הנוסחא עוד ועוד (כאן מסתתרת אינדוקציה) נקבל:

$$a_n = a_{n-1} + n = a_{n-2} + (n-1) + n = a_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n = ... =$$

$$a_0 + 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n$$

ולכן, לפי סכום סדרה חשבונית נקבל

$$a_n = a_0 + \frac{(1+n)\cdot n}{2} = 1 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2$$

3. מספרי מרסן מוגדרים באופן הבא: $M_0 = 0, M_1 = 1$ ולכל $n \geq 2$ מגדירים $M_n = 3M_{n-1} - 2M_{n-2}$. מצא הצגה מפורשת ל־$M_n$.

פיתרון הפולינום האופייני של הנוסחא הוא $x^2 - 3x + 2 = 0$, שפתרונותיו הם: $1, 2$, ולכן הפיתרון יהיה מהצורה

$$M_n = \alpha 2^n + \beta \cdot 1^n = \alpha 2^n + \beta$$

נציב את נתוני ההתחלה ונקבל את המערכת

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

ולכן $\alpha = 1, \beta = -1$, ולכן ההצגה המפורשת המתקבלת היא

$$M_n = 2^n - 1$$

4. פתור את נוסחת הנסיגה הבאה: $f(0) = 0, f(1) = f(2) = 1$ ולכל $n > 2$ מתקיים: $f(n) = 3f(n-1) + 4f(n-2) - 12f(n-3)$.

פיתרון הפולינום האופייני של הנוסחא הוא $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ הניתן לייצוג כ־ $(x-2)(x+2)(x-3)$, ולכן נקבל שהשורשים הם: $2, -2, 3$. לכן הפיתרון הכללי יהיה מהצורה

$$f(n) = \alpha 2^n + \beta(-2)^n + \gamma 3^n$$

נמצא את α, β, γ על פי תנאי ההתחלה. כלומר נפתור את המערכת

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha - 2\beta + 3\gamma = 1 \\ 4\alpha + 4\beta + 9\gamma = 1 \end{cases}$$

הפיתרון המתקבל הוא: $\alpha = 0, \beta = -\frac{1}{5}, \gamma = \frac{1}{5}$. ולכן פיתרון נוסחת הנסיגה הוא

$$f(n) = \frac{3^n}{5} - \frac{(-2)^n}{5}$$

5. פתור את נוסחת הנסיגה הבאה: $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2$, ולכל $n > 2$ מתקיים: $f(n) = 8f(n-1) - 21f(n-2) + 18f(n-3)$.

פיתרון הפולינום האופייני הוא:

$$x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = 0$$

וניתן לפרק אותו לצורה

$$(x-2)(x-3)^2 = 0$$

כלומר שורשיו הם: 2 מריבוי 1, ו־3 מריבוי 2. לכן הפיתרון הכללי יהיה מהצורה:

$$f(n) = \alpha 2^n + \beta 3^n + \gamma n 3^n$$

ושוב, על מנת למצוא את הקבועים α, β, γ נציב את נתוני ההתחלה ונקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta + 3\gamma = 1 \\ 4\alpha + 9\beta + 18\gamma = 2 \end{cases}$$

פתרונות המערכת הם: $\alpha=-4,\beta=4,\gamma=-1$, ולכן האיבר הכללי הוא:

$$f(n)=-4\cdot 2^n+4\cdot 3^n-n\cdot 3^n$$

6. פתור את נוסחת הנסיגה הבאה: $a_n=pa_{n+1}+(1-p)a_{n-1} \quad a_0=A,a_1=B,$.

פיתרון נקבל את הפולינום האופייני $px^2-x+(1-p)=0$, ולכן

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4p(1-p)}}{2p}$$

נשים לב ש־$p=\frac{1}{2} \iff (2p-1)^2=0 \iff 1-4p(1-p)=0$, כלומר נקבל את השורש $\frac{1}{2}$ בריבוי 1, ולכל $p\neq\frac{1}{2}$ נקבל שני שורשים שונים: $x_1=\frac{-1+(2p-1)}{2p}=1-\frac{1}{p}, x_2=\frac{-1-(2p-1)}{2p}=-1$.
לכן, הפיתרון הוא מהצורה

$$\begin{cases}\frac{\alpha n+\beta}{2^n} & p=\frac{1}{2}\\ \alpha(1-\frac{1}{p})^n+\beta(-1)^n & p\neq\frac{1}{2}\end{cases}$$

ומציאת α,β בהתאם לתנאי ההתחלה:

$$\begin{cases}\alpha=2B-A,\beta=A & p=\frac{1}{2}\\ \alpha=\frac{p(A+B)}{2p-1},\beta=A-\frac{p(A+B)}{2p-1} & p\neq\frac{1}{2}\end{cases}$$