רציפות (המשך)

משפט (הרכבת פונקציות)

תהי $f:X\to Y$ (X,Y מרחבים מטריים) רציפה בנק' $p\in X$. תהי $g:f(x)^{\subseteq Y}\to Z$ (Z מ"מ) רציפה בנקודה $q\doteqdot f(p)$. תהי $h=g\circ f:X\to Z$. אזי h רציפה בנקודה p.

הוכחה

יהי $\epsilon>0$ נתון. כיוון שg רציפה בנקודה q, קיים $\delta_1>0$ (תלוי בϵ) כך ש- $d_Z(g(y),g(q))<\epsilon$ כאשר $y\in f(X)$ ו$d_Y(y,q)<\delta_1$. כיוון שf רציפה בנק' p, קיים $\delta>0$ (תלוי בδ_1 ולכן תלוי בϵ) כך ש$d_Y(f(x),f(p))<\delta_1$ כאשר $x\in X$ ו$d(x,p)<\delta$. עבור xים אלה:

$$d_Z(h(x),h(p))=d_Z\left(g(f(x)),g\left(\underbrace{f(p)}_{q}\right)\right)<\epsilon$$

הגדרה

$f:X\to Y$ נקראת רציפה בX אם היא רציפה בכל נקודה של X.

משפט

פונקציה $f:X\to Y$ (X,Y מ"מ) רציפה על X אמ"ם $f^{-1}(B)$ קב' פתוחה לכל קב' פתוחה $B\subseteq Y$.

(הערה: במרחב טופולוגי כללי, לאו דווקא מטרי, מגדירים רציפות של f ע"י התכונה הזו.)

הוכחה

א נניח f רציפה על X. תהי $B\subseteq Y$ פתוחה כלשהי. צל"ה $f^{-1}(B)$ פתוחה (בX). תהי $x\in f^{-1}(B)$. צל"ה: x פנימית ל$f^{-1}(B)$. $f(x)\in B$. כיוון שB פתוחה, קיים כדור $B_Y(f(x),\epsilon)\subseteq B$. בגלל הרציפות של f בנקודה x ($x\in X$ שרירותית), קיים $\delta>0$ (תלוי בϵ) כך שאם $y\in X$ ו$d_X(y,x)<\delta$ אזי $d_Y(f(y),f(x))<\epsilon$
טענה: $B_X(x,\delta)\subseteq f^{-1}(B)$, כי: אם $y\in B_X(x,\delta)$, $d_X(y,x)<\delta$, לכן, לפי (*), $d_Y(f(y),f(x))<\epsilon$. ז"א $f(y)\in B_Y(f(x),\epsilon)\subseteq B$. לכן $y\in f^{-1}(B)$.

ב נתון שהתכונה מתקיימת. צל"ה: f רציפה בכל נקודה $p\in X$. יהי $\epsilon>0$ נתון. תהי $p\in X$ שרירותית. $B\doteqdot B_Y(f(p),\epsilon)$ קב' פתוחה. לכן $f^{-1}(B)$ פתוחה, ו$p\in f^{-1}(B)$ (כי $f(p)\in B$ (מרכז הכדור)). כיוון ש$f^{-1}(B)$ פתוחה, p היא פנימית ב$d^{-1}(B)$. כלומר קיים כדור $B_X(p,\delta)\subseteq f^{-1}(B)$. ז"א: אם $y\in B_X(p,\delta)$ אזי $y\in f^{-1}(B)$. ז"א אם $\boxed{d(y,p)<\delta}$ אזי $f(y)\in B$ ז"א $\boxed{d_Y(f(y),f(p))<\epsilon}$

משפט

יהיו X,Y מרחבים מטריים, ותהי $f:X\to Y$ רציפה. אזי f מעתיקה קבוצות קומ-פקטיות לקבוצות קומפקטיות.

(כלומר, אם $E\in X$ קומפקטית בX, אזי $f\left(E\right)$ קומפקטית בY.)

הוכחה

נתון $E\in X$ קומפקטית. צל"ה $f\left(E\right)$ קומפקטית(בY)

יהי $\left\{V_\alpha\right\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של $f\left(E\right)$(צל"ה: קיים תת-כיסוי סופי לכיסוי זה).

$f^{-1}\left(V_\alpha\right)$ קבוצה פתוחה(לכל α), לפי המשפט הקודם.(לפי הנחת הרציפות של f!)

$$E\subseteq f^{-1}\left(f\left(E\right)\right)\subseteq f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha}V_\alpha\right)=\bigcup_{\alpha}f^{-1}\left(V_\alpha\right)$$

כלומר $\left\{f^{-1}\left(V_\alpha\right)\right\}_{\alpha\in I}$ הוא כיסוי פתוח של E.

כיוון שE קומפקטית, יש לכיסוי הנ"ל תת כיסוי סופי, כלומר קיימים $\alpha_1,...\alpha_n$ בI, כך ש$E\subseteq\bigcup\limits_{i=1}^{n}f^{-1}\left(V_{\alpha_i}\right)$.

$$f\left(E\right)\subseteq f\left(\bigcup_{i=1}^{n}f^{-1}\left(V_{\alpha_i}\right)\right)=\bigcup_{i=1}^{n}f\left(f^{-1}\left(V_{\alpha_i}\right)\right)\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}V_{\alpha_i}$$

מש"ל.

תוצאה 1

אם $E\subseteq X$ קומפקטית, ו$f:X\to Y$ רציפה, אזי f חסומה על E. (כלומר $f\left(E\right)$קבוצה חסומה בY).

במקרה שY מרחב נורמי, $\left\|f\left(x\right)\right\|\le M$ לכל $x\in E$ עבור M מסדר מתאים.

כי קבוצה B במרחב נורמי היא חסומה אמ"ם קיים קבוע $M>0$ כך ש$\|y\|\le M$ לכל $y\in B$, כי אם B חסומה הרי $B\subseteq B_Y\left(q,R\right)$. לכן, לכל $y\in B$:

$$\|y\|=\left\|\left(y-q\right)+q\right\|\le\|y-q\|+\|q\|=R+\|q\|\div M$$

מאידך, אם $\|y\|\le M$ לכל $y\in B$, אזי $d\left(y,0\right)=\|y-0\|=\|y\|\le M$ לכל $y\in B$, כלומר $B\subseteq B\left(0,M+1\right)$, ז"א B חסומה.

תזכורת

אם $A\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלעיל (כלומר $x\le M$ לכל $x\in A$) אזי יש לA חסם מלעיל "קטן ביותר", כלומר, קיים מספר L כך ש$x\subseteq L$ לכל $x\in A$. אולם לכל $\epsilon>0$, קיים $x\in A$ כך ש$x>L-\epsilon$.

L זה נקבע באופן יחיד ע"י התנאי לעיל, ונקרא <u>החסם העליון</u>(או סופרמום) של A, מסומן $L = \sup A$. ע"י היפוך האי-שוויוניות, מגדירים את <u>החסם התחתון</u> של קב' A <u>חסומה מלרע</u>(בלעז: אינפימום) ומסמנים אותו ב$\inf A$.

אם $A \subseteq \mathbb{R}$ חסומה מלעיל, אזי $L \doteqdot \sup A$ או שייך לA או הוא נק' גבול של A(או שני הדברים גם יחד)

לכן: אם A קבוצה סגורה ב$\mathbb{R}$ וחסומה מלעיל(מלרע), אזי $\sup A \in A$($\inf A \in A$). קוראים אז ל$\sup A$ "מקסימום" של A(סימון $\max A$)(או, בהתאמה, "מימימום של A מסומן $\min A$]

תוצאה 2

יהיו X מרחב מטרי ותהי $f : X \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אזי לכל קבוצה קומפקטית $E \subseteq X$ קיימים $a, b \in E$ כך ש$\forall_{x\in E} f(a) \leq f(x) \leq f(b)$

הוכחה

E קומפקטית, $f(E)$ חסומה בY, לכן $\{f(x) | x \in E\}$ סגורה וחסומה במרחב נורמי $M \leq \|f(x)\| \leq 0$ לכל $x \in E$, ולכן המקסימום והמינימום של קבוצה זו שייכים לקבוצה. זה אומר ש$\max\limits_{E} f = f(b)$ עבור $b \in E$ מתאים(וכן ל$\min$)

משפט(רציפות הפונקציה ההפוכה)

X, Y מרחבים מטריים, X קומפקטי, $f : X \to Y$ <u>חח"ע ועל</u>. תהי g הפונקציה ההפוכה. אזי: אם f <u>רציפה</u>, גם g רציפה.

הערה

עבור X, Y קבוצות כלשהן, וf, g כנ"ל, לכל $E \subseteq X$ $\boxed{f(E) = g^{-1}(E)}$ שכן

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

$$y \in f(E) \Leftrightarrow y = f(x), x \in E \Leftrightarrow E \ni x = g(y) \Leftrightarrow g \in g^{-1}(E) = \left\{g^{-1}(x) \middle| x \in E\right\}$$

הוכחת המשפט

נתון f רציפה. צל"ה g רציפה.

תהי $X \subseteq X$ פתוחה. צל"ה $g^{-1}(E)$ פתוחה(ואז g רציפה לפי משפט קודם). $g^{-1}(E) = f(E) = \left[f\left(E^C\right)\right]^C$. $E^C \subseteq X$ סגורה קומפקטית. E^C קומפקטית(משפט קודם). $f\left(E^C\right)$ קומפקטית(לפי משפט, כי f רציפה). לכן $f\left(E^C\right)$ סגורה(משפט). לכן $\left[f\left(E^C\right)\right]^C = g^{-1}(E)$ פתוחה. מש"ל.