תרגיל בית 9 באלגברה מופשטת
88-211 סמסטר א' תשע"ו

שאלה 1. אם $f : G \to H$ היא אפימורפיזם, אז H נקראת תמונה אפימורפית של G.
מצאו את כל התמונות האפימורפיות של D_4 עד כדי איזומורפיזם. רמז: משפט האיזומורפיזם הראשון.

שאלה 2. תהי G חבורה סופית מסדר אי זוגי. הוכיחו שלכל איבר $e \neq x \in G$ מתקיים $x^{-1} \notin \operatorname{conj}(x)$.

שאלה 3. מצאו את $|\operatorname{conj}(\sigma)|$ כאשר $\sigma = (2573) \in S_{14}$.

שאלה 4. יהיו הומומורפיזמים $f : G \to H$ ו-$g : H \to G$ כך ש-$f \circ g = \mathrm{id}_H$.

א. הוכיחו כי g חח"ע ו-f על.

ב. הוכיחו כי $G = \ker(f) \rtimes \operatorname{im}(g)$.

שאלה 5. תהי G חבורה סופית, ותהי H תת־חבורה מאינדקס 2. הוכיחו שאם $f : G \to H$ אפימורפיזם ושהגרעין $\ker(f)$ לא מוכל ב-H, אז $G \cong H \times \mathbb{Z}_2$. רמז: השאלה הקודמת.

שאלה 6. נתונות החבורות הבאות מסדר 24: S_4, $\mathbb{Z}_{24}$, $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_4 \times S_3$, $\mathbb{Z}_3 \times D_4$, $\mathbb{Z}_3 \times Q_8$, $\mathbb{Z}_2 \times A_4$, D_{12} ו-$SL_2(\mathbb{Z}_3)$ (מטריצות 2×2 עם דטרמיננטה 1 מעל השדה בן שלושה איברים). בחרו לפחות ארבע מהן והוכיחו שאף אחת מהן לא איזומורפית לאחרות שבחרתן. רמז: סדר של איברים.

אגב, ישנן 15 חבורות מסדר 24 עד כדי איזומורפיזם. האם אתם יכולים להוסיף עוד כמה לרשימה?

שאלה 7. חבורה G תקרא פשוטה אם אין לה תת־חבורות נורמליות לא טריוויאלית. כלומר G פשוטה אם תת־החבורות הנורמליות היחידות שלה הן $\{e\}$ ו-G.

נתונה שרשרת עולה של חבורות פשוטות $G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3 \subseteq \ldots$. הוכיחו שהאיחוד $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_i$ הוא גם חבורה פשוטה.

שאלה 8. כעת נראה שקיים זוג של חבורות לא איזומורפיות המשוכנות אחת בתוך השנייה.
נזכיר כי חבורה A משוכנת בחבורה B אם קיים שיכון $f : A \to B$.
נסמן $G = \bigcup_{n \geq 5} S_n$ איחוד כל חבורות הסימטריה S_n עבור $n \geq 5$, ונסמן $H = \bigcup_{n \geq 5} A_n$ איחוד כל חבורות החילופין A_n עבור $n \geq 5$.

הערה. אנו יכולים לראות את S_n כתת־חבורה של S_{n+1} לפי השיכון הסטנדרטי, השולח תמורה σ של n איברים לתמורה $\hat{\sigma}$ של $n+1$ איברים לפי $\hat{\sigma}(i) = \sigma(i)$ לכל $1 \leq i \leq n$ ומקבע את האיבר האחרון $\hat{\sigma}(n+1) = n+1$. להמשך התרגיל נשתמש בנקודת מבט זו כשנדון בחבורות G ו-H.

א. הראו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ קיימים שיכונים $A_n \hookrightarrow S_n \hookrightarrow A_{n+2}$. רמז: השיכון הראשון הוא ברור לפי הכלה. לשיכון השני הגדירו העתקה

$$\phi_n : S_n \to A_{n+2}$$
$$\sigma(i) \mapsto \begin{cases} \sigma(i-2)+2 & 3 \le i \le n+2 \\ 1 & i=1 \wedge \operatorname{sign}(\sigma)=1 \\ 2 & i=2 \wedge \operatorname{sign}(\sigma)=1 \\ 2 & i=1 \wedge \operatorname{sign}(\sigma)=-1 \\ 1 & i=2 \wedge \operatorname{sign}(\sigma)=-1 \end{cases}$$

כלומר אם $3 \le i \le n+2$ אז $\phi_n(\sigma)(i)=\sigma(i-2)+2$; אם σ היא תמורה זוגית, אז נשלח אותה "להזזה" שלה בשני מקומות בתוך A_{n+2}, ואם σ תמורה אי־זוגית אז היא תשלח לאותה "הזזה" כפול החילוף $(1\,2)$. הראו מהבנייה כי תמונת ϕ_n מוכלת ב-A_{n+2} ושהיא הומומורפיזם מוגדר היטב. אתגר: חשבו למה אי אפשר לשכן את S_n בתוך A_{n+1} עבור $n \ge 2$.

ב. הראו כי G משוכנת בתוך H.
הדרכה: בדרך אחת ניתן לשים לב כי החבורה G היא חבורת התמורות של $\mathbb{N}$ עם תומך סופי (התומך של תמורה הוא המספרים שהיא מזיזה. ב-S_n כל התמורות הן עם תומך סופי), והחבורה H היא חבורת התמורות הזוגיות של $\mathbb{N}$ עם תומך סופי. כעת אפשר להגדיר שיכון $\varphi : G \to H$ לפי $\varphi(\sigma) = (12)^{(\operatorname{sign}(\sigma)-1)/2}\rho\sigma\rho^{-1}$ כאשר $\rho(i)=i+2$.
בדרך אחרת יש להראות כי השיכונים בסעיף הקודם תואמים, כלומר $\phi_{n+1}(\sigma) = \phi_n(\sigma)$ לכל $n \ge 5$ ולכל $\sigma \in S_n$, וכך לבנות שיכון $\varphi : G \to H$.

ג. הראו כי H משוכנת בתוך G.

ד. הוכיחו כי החבורות G ו-H אינן איזומורפיות. רמז: אחת פשוטה והשנייה לא.

שאלה 9 (אתגר רשות). תהי G חבורה סופית, ויהי α אוטומורפיזם של G השולח יותר משלושת רבעי G להופכי שלהם. כלומר

$$\left|\left\{x : \alpha(x) = x^{-1}\right\}\right| > \frac{3\,|G|}{4}$$

הוכיחו כי $\alpha(x) = x^{-1}$ לכל $x \in G$.

בהצלחה!