פיתרון תרגיל בית 6 במתמטיקה בדידה 2 להנדסה תשעח

29 במאי 2018

1. יהי G גרף עם 6 קודקודים. הוכיחו שב־G או במשלים, $\overline{G}$, יש משולש (מעגל המורכב משלושה קודקודים).

__פתרון:__

סימון: את הדרגה של קודקוד v במשלים נסמן ב־$\overline{\deg(v)}$.

נתבונן בקודקוד ספציפי v. נחלק למקרים:

1. $\deg(v) \leq 2$: לכן במשלים נקבל $\overline{\deg(v)} = 6-1-\deg(v) \geq 3$. נסמן את שלושת שכניו במשלים הבטוחים (אולי יש עוד) ב־u_1, u_2, u_3. אם קיימים $1 \leq i \neq j \leq 3$ כך שהקשת $\{u_i, u_j\} \in \overline{G}$, קיבלנו משולש במשלים: v, u_i, u_j. אחרת, ז"א שכל שלושת הקשתות האפשריות בין u_i, u_2, u_3 לא נמצאות במשלים, ולכן שלושתן נמצאות בגרף המקורי וקיבלנו משולש במקורי.
2. $\deg(v) \geq 3$: נעשה מה שעשינו לעיל על הגרף המקורי.

2. הוכיחו או הפריכו:

א. אם G קשיר אז $\overline{G}$ לא קשיר.

ב. אם G גרף רגולרי אז גם $\overline{G}$ גרף רגולרי.

__פתרון:__

א. הפרכה: ניקח $V = \{1,2,3,4\}, E = \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}\}$, נקבל גרף $G = (V,E)$ קשיר (ניתן לסובבו לצורה של האות ח). צלעות הגרף המשלים הן $\overline{E} = \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,4\}\}$ ונקבל שגם המשלים $\overline{G} = (V, \overline{E})$ גרף קשיר.

ב. הוכחה. נסמן את מספר הקודקודים בגרף ב־n, ונסמן את דרגת הקודקוד בגרף המשלים ב $\overline{\deg(v)}$. נשים לב ש־$\overline{\deg(v)} = n-1-\deg(v)$, כי בסה"כ יש $n-1$ צלעות החלות ב־v, ומתוכן $\deg(v)$ נמצאות ב־G, ולכן היתר ב־$\overline{G}$. לכן אם G הוא גרף k־רגולרי אז לכל $v \in V$ מתקיים $\deg(v) = k$, ונקבל שלכל $v \in V$ מתקיים $\overline{\deg(v)} = n-1-k$, ולכן הגרף $\overline{G}$ הוא $(n-1-k)$־רגולרי.

3. יהי $G = (V,E)$ גרף פשוט עם $|V| = n$, המקיים:

$$.\forall v \in V : \deg(v) \geq \frac{n-1}{2}$$

א. הוכיחו: G קשיר והקוטר שלו הוא לכל היותר 2.

ב. מצאו שני גרפים G_1, G_2 המקיימים את התכונה כך ש $Q(G_1) = 1 \wedge Q(G_2) = 2$.

__פתרון:__

א. עשינו משהו דומה בכיתה עבור $n = 100$. נראה עכשיו את התכונה הכללית. אז יהי $G = (V, E)$ גרף כנ"ל, נראה שהקוטר שלו הוא לכל היותר 2, ובפרט הוא קשיר. נניח בשלילה שלא, כלומר שהקוטר גדול או שווה ל־3. אזי קיימים שני קודקודים $v \neq u \in V$ כך ש־ $\mathrm{d}(v, u) \geq 3$. נסמן $\Gamma(v) = \{w \in V | \{v, w\} \in E\}, \Gamma(u) = \{w \in V | \{u, w\} \in E\}$, כלומר אוסף השכנים. מהנתון נקבל $|\Gamma(v)| \geq \frac{n-1}{2}, |\Gamma(u)| \geq \frac{n-1}{2}$, וכיון שהמרחק ביניהם הוא לפחות 3 נקבל שהחיתוך ריק כלומר, $\Gamma(v) \cap \Gamma(u) = \varnothing$, ולכן $|\Gamma(v) \cup \Gamma(u)| \geq 2 \cdot \frac{n-1}{2}$, ובתוספת ל$v, u$ עצמם נקבל שיש לפחות $n + 1$ קודקודים, בסתירה לכך שיש n קודקודים.

ב. G_1 יהיה הגרף המלא K_n שהקוטר שלו הוא 1. נשמיט צלע כלשהי מG_1 ונקבל גרף G_2 עם קוטר 2 (המרחק בין הקודקודים החלים בצלע שהשמטנו הופך להיות 2, ושאר המרחקים 1, לכן הקוטר הוא 2).