

אנליזה מתקדמת למורים, תרגיל 4

11 בנובמבר 2020

1. נתונים שני המספרים הראשונים בסדרה הנדסית:

$$a_1 = i$$

$$a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

(א) מצאו את מכפלת 15 האיברים הראשונים בסדרה.

(ב) מצאו את הטבעי הקטן ביותר n עבורו $a_n = a_1$.

(ג) עבור אילו ערכי n מתקיים: $S_n = 0$?

2. נתונה סדרה הנדסית שבה $a_1 = 1 - \sqrt{3} \cdot i$, $a_5 = -2$. חשבו את כל האפשרויות עבור a_2 .

3.

(א) יהי z מספר מרוכב הנמצא על מעגל היחידה. הוכיחו: $z + \frac{1}{z}$ הוא מספר ממשי.

(ב) z_1, z_2 הם מספרים מרוכבים הנמצאים על מעגל היחידה. נתון: $Im(z_1), Im(z_2) > 0$ (כלומר, החלקים המדומים שלהם חיוביים). הוכיחו: אם $z_1 + \frac{1}{z_1} + z_2 + \frac{1}{z_2} > 2$ אז z_1, z_2 נמצאים ברביע הראשון.

4. יהי $w = \text{cis}\theta$ מספר מרוכב. נתון: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. נתונה סדרה הנדסית שבה $a_1 = \frac{1}{w}$, $a_2 = w$. נתון: סכום חמשת איברי הסדרה הראשונים הוא 0 ($S_5 = 0$).

(א) הוכיחו שכל איברי הסדרה נמצאים על מעגל היחידה.

(ב) מצאו את כל האפשרויות עבור θ .