תרגיל 5 - חשבון אינפי 3 תש"פ - בוגרים

צורת רישוס. את הדיפרנציאל של f ב a נסמן על ידי $Df\left(a\right)$. נסמן על ידי

$$\nabla f\left(a\right)=\left(\begin{array}{ccc}\frac{\partial f}{\partial x_{1}}\left(a\right) & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_{n}}\left(a\right)\end{array}\right)$$

את הגרדיאנט של f (וקטור שורה של הנגזרות החלקיות של f ב a).

לעיתים, נסמן $f'_{x_i}\left(a\right)$ במקום $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(a\right)$.

תרגיל 1. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצאו את הגבול ואת הגבולות החוזרים ב $\left(0,0\right)$ או שהראו שהם אינם קיימים.

1. $f\left(x,y\right)=\left(x+y\right)\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right)$.

פתרון. הגבולות החוזרים אינם קיימים כי:

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\left(x+y\right)\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right)=$$
$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+x\sin\left(\frac{1}{y}\right)+y\sin\left(\frac{1}{x}\right)+y\sin\left(\frac{1}{y}\right)=$$
$$\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\lim_{y\to0}x\sin\left(\frac{1}{y}\right)+\lim_{y\to0}y\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\lim_{y\to0}y\sin\left(\frac{1}{y}\right)\right)=$$
$$\lim_{x\to0}\left(x\sin\frac{1}{x}+\lim_{y\to0}x\sin\frac{1}{y}\right)$$

הגול אינו קיים מפני ש $\lim_{y\to0}x\sin\frac{1}{y}$ אינו קיים לאף $0\neq x$. הגול החוזר $\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}$ הוא סימטרי. מצד שני,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x+y\right)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0$$

מפני ש $\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ חסום ו $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x+y\right)=0$.

2. $f\left(x,y\right)=\frac{x^2}{x^2+y^2}$.

פתרון. מתקיים:

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2}=1\ .$$
$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to0}0=0\ .$$

הגבול הרגיל לא קיים, מפני שהגבולות החוזרים שונים זה מזה.

3. $f(x,y)=\frac{x+\sin(y)}{x+y}$.

פתרון. נחשב:

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}\frac{x+\sin y}{x+y}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=1$$
$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}\frac{x+\sin y}{x+y}=\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}=1$$

הגבול לא קיים. נתקדם לאורך המסלול $x=-\sin y$ ונקבל שהגבול הוא 0 באופן זהותי, שהוא שונה מהגבולות החוזרים שקיבלנו בסיעיפים הקודמים.

תרגיל 2. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות בכל נקודה בה הן מוגדרות:

1. $f(x,y)=x^3+3y^2-\frac{x}{y}$.

פתרון. הפונקציה מוגדרת בתחום $y\neq0$. הנגזרות החלקיות הן:

$$f_x=3x^2-\frac{1}{y}.$$
$$f_y=6y-\frac{1}{y^2}.$$

2. $f(x,y)=e^{\cos xy}$.

פתרון. הפונקציה מוגדרת בכל $\mathbb{R}^2$. וכם קיימות הנזרות החלקיות:

$$f_x=-ye^{\cos xy}\sin xy$$
$$f_y=-xe^{\cos xy}\sin xy$$

3. $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

פתרון. הפונקציה מוגדר בכל נקודה. לכל נקודה, פרט לראשית הצירים, חישוב נגזרות חלקיות על פי הנוסחא נותן:m

$$f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$f_z=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

מצד שני, הגבולות החלקיים ב $(0,0,0)$ אינם קיימים. אם קובעים שני משתנים אחרים להיות 0 מקבלים שהפונציה מתלכדת עם הפונקציה || שאינה גזירה ב 0 (עבור כל אחד מהמשתנים). כך: אם ננסה לחשב את

$$f_x(0,0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0,0)-f(0,0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\sqrt{h^2}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{|h|}{h}$$

והגבול תלוי בסימן של h. באותו אופן f_y ו f_z אינם קיימים ב $(0,0,0)$.

תרגיל 3. תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x,y)=xy$. הראו, ש f דיפרנציאבילית בכל $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ומתקיים: $Df(a,b)(u,v)=bu+av$.

פתרון. הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות בכל נקודה, דהיינו

$$f_x=y,f_y=x$$

ולכן f דיפרנציאבילית. עכשיו, נחשב את הדיפרנציאל ב (a,b).

$$Df(a,b)(u,v)=\nabla f(a,b)\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}f_x & f_y\end{pmatrix}(a,b)\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=bu+av$$

תרגיל 4. האם הפונקציות הבאות דיפרנציאביליות ב $(0,0)$?

1. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

פתרון. נבדוק תחילה האם הנגזות החלקיות קיימות:

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\frac{0}{h}=0$$
$$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\frac{0}{h}=0$$

עכשיו, נבדוק האם מתקיים התנאי ההכרחי לדיפרנציאביליות. זאת אומרת:

$$f(h,k)=f(0,0)+\nabla f(0,0)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+o(\|(h,k)|)$$

$$\lim_{(h,k)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}}{\sqrt{h^2+k^2}}=$$
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{hk^2}{h^2+k^2}-0-0}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

והגבול לא קיים: אם נתקרב לאורך המסלול $h=k$ נקבל שהגבול הוא

$$\lim_{h\to0}\frac{h^3}{(2h^2)\sqrt{2h^2}}\neq0$$

ואם נתקרב לאורך המסלול $(0,k)$ הגבול הוא

$$\lim_{k\to0}\frac{0}{k^2|k|}\neq0 .$$

2. $.f(x,y)=\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)^{3}$

פתרון. שוב, נבדוק שהנגזרות החלקיות קיימות ב $(0,0)$.

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(h^{\frac{1}{3}}\right)^{3}}{h}=\frac{h}{h}=1$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(h^{\frac{1}{3}}\right)^{3}}{h}=\frac{h}{h}=1$$

עכשיו, נבדוק האם התנאי ההכרחי לדיפרנציאביליות:

$$f(h,k)=f(0,0)+\nabla f(0,0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}+o(\|(h,k)\|)$$

או באופן שקול:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{\|(h,k)\|}=0.$$

נציב ונקבל:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{\|(h,k)\|}=$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\left(h^{\frac{1}{3}}+k^{\frac{1}{3}}\right)^{3}-h-k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

והגבול שונה מ 0, (למען האמת פשוט לא קיים). אם נתקרב לאורך המסלול $h=k$ נקבל:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{8h-2h}{\sqrt{2h^2}}=\pm\frac{6}{\sqrt{2}}\neq 0$$

הגבול לא קיים כי תלוי בסימן של h.

3. $.f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

פתרון. שוב, נמצא את הנגזרות החלקיות ב $(0,0)$ על ידי גזירה לפי הגדרה. שוב, נקבל:

$$.f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=-1$$

נבדוק, שוב האם מתקיים:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{0} = 0$$

נחשב:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}}{0} =$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{h^3-k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}+k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^3-k^2+k\sqrt{h^2+k^2}}{h^2+k^2}$$

אם נתקרב לאורך המסולול $h=k$ נקבל שהגבול שונה מ 0.

תרגיל 5. תהיינה $f(x,y)$ ו $g(x,y)$ פונקציות דיפרנציאביליות ב $(0,0)$. נגדיר:

$$h(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & xy>0 \\ g(x,y) & xy \le 0 \end{cases}.$$

הוכיחו שאם $f(0,0)=g(0,0), f'_x(0,0)=g'_x(0,0), f'_y(0,0)=g'_y(0,0)$ אזי h דיפרציאבילית ב $(0,0)$.

פתרון. תרגיל 5 שאלה 3 תשע"ט.

תרגיל 6. נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ על ידי

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)+y^2 & x\neq 0 \\ y^2 & x=0 \end{cases}.$$

1. הראו ש f רציפה ב $(0,0)$.
2. מצאו את הנגזרות החלקיות של f ב $(0,0)$.
3. הראו ש f דיפרנציאבילית ב $(0,0)$.
4. הראו ש f'_x אינה רציפה ב $(0,0)$.

פתרון. הפונקציה רציפה ב $(0,0)$ מפני ש

$$\lim_{x\to 0} x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

שווה לגבול ב $(0,0)$. (חסומה כפול שואפת ל 0) ו y^2 רציפה. סכום של שני רציפות היא רציפה. הנגזרות החלקיות ב $(0,0)$ נתונות על ידי

$$\begin{aligned}
f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^3\sin\frac{1}{h}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} h^2\sin\frac{1}{h} = 0\\
f_y(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h} = 0
\end{aligned}$$

כמו שראינו, מכיוון ש f רציפה ב $(0,0)$ כי

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^3\sin\frac{1}{x}+y^2 = 0 = f(0,0)$$

מספיק להראות ש

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0,0)h-f_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} =\\
&\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} =\\
&\lim_{(h,k)\to(0,0)}\begin{cases}\frac{h^3\sin\frac{1}{h}+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} & h\neq 0\\ \frac{k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} & h=0\end{cases} =\\
&\begin{cases}\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^3\sin\frac{1}{h}+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} & h\neq 0\\ \frac{k^2}{\lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2}} & h=0\end{cases} = 0
\end{aligned}$$

כי שני הגבולים שואפים ל 0). עכשיו, נראה ש f_x אינה רציפה ב $(0,0)$.
נחשב את f_x. אם $x\neq 0$, אזי

$$f_x = 3x^2\sin\frac{1}{x}+x\cos\frac{1}{x}$$

אם $x=0$, אזי גוזרים על פי ההגדרה ומקבלים:

$$f_x(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \frac{h^3\sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0}h^2\sin\frac{1}{h} = 0.$$

נשים לב, ש f_x כן רציפה ב $(0,0)$ ושאופת ל 0. היתה טעות הקלדה - במקור אמור להופיע $x^2\sin\frac{1}{x}$.

תרגיל 7. (ממבחן) תהי $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{\sqrt{1+\left\Vert x\right\Vert ^{2}}-1}{\left\Vert x\right\Vert ^{2}} & x\neq0\\ \frac{1}{2} & x=0\end{cases}.$$

1. הראו ש f רציפה ב $(0,0)$.
2. האם f דיפרנציאבילית ב $(0,0)$?

פתרון. נראה רציפות:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+\left\Vert x\right\Vert ^{2}}-1}{\left\Vert x\right\Vert ^{2}} & =\lim_{x\to0}\frac{1+\left\Vert x\right\Vert ^{2}-1}{\left\Vert x^{2}\right\Vert \left(\sqrt{1+\left\Vert x\right\Vert ^{2}}+1\right)}\\ & =\lim_{x\to0}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\left\Vert x\right\Vert ^{2}}+1\right)}\\ & =\frac{1}{2}=f\left(0\right)\end{aligned}$$

נבדוק דיפרנציאביליות:

נבדוק תחילה, האם הנגזרות החלקיות קיימו

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(0,\ldots0\right) & =\lim_{h\to0}\frac{f\left(0,\ldots,h,\ldots0\right)-f\left(0,\ldots,0\right)}{h}\\ & =\lim_{h\to0}\frac{\frac{\sqrt{1+h^{2}}-1}{h^{2}}-\frac{1}{2}}{h}\\ & =\lim_{h\to0}\frac{\frac{2\sqrt{1+h^{2}}-2-h^{2}}{h^{2}}}{h}\\ & =\lim_{h\to0}\frac{2\sqrt{1+h^{2}}-2-h^{2}}{2h^{3}}\\ & =\lim_{h\to0}\frac{4\left(1+h^{2}\right)-\left(2+h^{2}\right)^{2}}{2h^{3}\left(2\sqrt{1+h^{2}}+2+h^{2}\right)}\\ & =\lim_{h\to0}\frac{h^{4}}{2h^{3}\left(\sqrt{1+h^{2}}+2+h^{2}\right)}=0\end{aligned}$$

נבדוק, האם מתקיים:

$$\lim_{v\to0}\frac{f\left(0+v\right)-\nabla f\left(0\right)v-f\left(0\right)}{\left\Vert v\right\Vert }=0$$

מתקיים:

$$\lim_{v\to 0}\frac{f\left(0+v\right)-\nabla f\left(0\right)v-f\left(0\right)}{\left\|v\right\|}=$$

$$\lim_{v\to 0}\frac{\frac{\sqrt{1+\left\|v\right\|^{2}}-1}{\left\|v\right\|^{2}}-\frac{1}{2}}{\left\|v\right\|}=$$

$$\lim_{v\to 0}\frac{\frac{2\sqrt{1+\left\|v\right\|^{2}}-2-\left\|v\right\|^{2}}{2\left\|v\right\|^{2}}-}{\left\|v\right\|}=$$

$$\lim_{v\to 0}\frac{4\left(1+\left\|v\right\|^{2}\right)-\left(2+\left\|v\right\|^{2}\right)}{2\left\|v\right\|^{3}\left(\sqrt{1+\left\|v\right\|^{2}}+\left(2+\left\|v\right\|^{2}\right)\right)}=0$$

כפי שרצינו.