נגזרת רדון ניקודים:

יהי מרחב מדיד (X,S) ושתי מידות μ ו- ν עליו:

א) נאמר ש- ν רציפה בהחלט (רב"ח בקיצור) לפי μ אם $\forall A\in S:\ \mu(A)=0\ \Rightarrow \nu(A)=0$.
ב) נאמר ש- μ ו- ν אם ישנה $A\in S$ עבורה $\mu(A)=0$ ו- $\nu(A^c)=0$.

לפי משפט רדון לכל, בעבור מידה μ נתונה על, לכל מידה ν יש מידות ν_1 ו- ν_2 כך ש- ν_1 רב"ח לפי μ, ν_2 מאונכת ל- μ ו- $\nu=\nu_1+\nu_2$. (כל המידות הן על אותו מרחב מדיד)

הערה: אם ν_1 ו- ν_2 מידות על מרחב מדיד (X,S) אז המידה $\nu_1+\nu_2$ (גם היא על (X,S)) מוגדרת לפי $(\nu_1+\nu_2)(A)=\nu_1(A)+\nu_2(A)$. זו מידה כי $(\nu_1+\nu_2)(\emptyset)=\nu_1(\emptyset)+\nu_2(\emptyset)=0$ ואם $\{A_n\}\subseteq S$ זרות אז

$$(\nu_1+\nu_2)\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\nu_1\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)+\nu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_1(A_n)+\sum_{n=1}^{\infty}\nu_2(A_n)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(\nu_1+\nu_2)(A_n)$$

לפי משפט רדון ניקודים: לכל מידה ν רציפה בהחלט לפי מידה μ יש פונקציה מדידה $f:X\to[0,\infty]$ כך ש- $\forall A\in S:\ \nu(A)=\int_A\ fd\mu$. f שמקיימת זאת נקראת נגזרת רדון ניקודים ומסמנים אותה $\frac{d\nu}{d\mu}$.

נשים לב:

א) שאם שתי פונקציות שונות מקיימות $\forall A\in S:\ \int_A\ f_1d\mu=\int_A\ f_2d\mu$ אזי $\forall A\in S:\ \int_A\ f_1-f_2d\mu=0$ ובפרט $f_1=f_2$ כב"מ לפי μ, ולכן נגזרת רדון ניקודים יחידה עד כדי שוויון כב"מ לפי μ.
ב) $\frac{d\nu}{d\mu}\geq 0$ כב"מ לפי μ, אחרת הייתה קבוצה A עם $\mu(A)>0$ ש $\frac{d\nu}{d\mu}<0$ בה, ולכן $\nu(A)=\int_A\ fd\mu<0$ בסתירה לכך שמידה צריכה להיות אי שלילית. לפי א' ניתן להניח ש- $\frac{d\nu}{d\mu}\geq 0$ בכל מקום.

תרגיל 1:

א) תהי מידה ν רב"ח לפי מידה μ. הראו שלכל פונקציה מדידה $g:X\to[-\infty,\infty]$ מתקיים ש $\int_X\ g\frac{d\nu}{d\mu}d\mu=\int_X\ gd\nu$
ב) יהיו מידות ν_1,ν_2 רב"ח לפי מידה μ. הראו ש- $\nu_1+\nu_2$ רב"ח לפי μ וש- $\frac{d(\nu_1+\nu_2)}{d\mu}=\frac{d\nu_1}{d\mu}+\frac{d\nu_2}{d\mu}$.
ג) תהי מידה η רב"ח לפי מידה ν שבעצמה רב"ח לפי מידה μ. הראו ש- η רב"ח לפי μ וש- $\frac{d\eta}{d\mu}=\frac{d\eta}{d\nu}\cdot\frac{d\nu}{d\mu}$ (מאין כלל שרשרת).

פתרונות:

א) נפרק למקרים. אם $g=I_A$ פונק' אינדיקטור אז ישירות לפי ההגדרה $\int_X\ g\frac{d\nu}{d\mu}d\mu=\int_A\ \frac{d\nu}{d\mu}d\mu=\int_A\ d\nu=\int_X\ gd\nu$.
וניתן להרחיב את זה לפונקציה פשוטה $g=\sum_{i=1}^{n}a_iI_{A_i}$ בגלל ליניאריות האינטגרל.

לפונקציה חיובית $g \geq 0$ ניקח סדרת פונקציות עולה חלש g_n ששואפות נקודתית ל- g ולפי משפט ההתכנסות המונוטונית של לבג $\lim_{n\to\infty} \int_X g_n \frac{dv}{d\mu} d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n dv = \int_X g dv$.
מצד שני $g_n \frac{dv}{d\mu}$ סדרת פונקציות עולה חלש ששואפות נקודתית ל- $g \frac{dv}{d\mu}$ ולכן $\lim_{n\to\infty} \int_X g_n \frac{dv}{d\mu} d\mu = \int_X g \frac{dv}{d\mu} d\mu$.
לפונקציה g מדידה כללית, בגלל ש- $\frac{dv}{d\mu} \geq 0$, $\left(g\frac{dv}{d\mu}\right)^+ = g^+ \frac{dv}{d\mu}$ ו- $\left(g\frac{dv}{d\mu}\right)^- = g^- \frac{dv}{d\mu}$ ולכן

$$\int_X g\frac{dv}{d\mu}d\mu = \int_X \left(g\frac{dv}{d\mu}\right)^+ d\mu - \int_X \left(g\frac{dv}{d\mu}\right)^- d\mu = \int_X g^+\frac{dv}{d\mu}d\mu - \int_X g^-\frac{dv}{d\mu}d\mu$$

$$= \int_X g^+ dv - \int_X g^- dv = \int_X g dv$$

ב) רב"ח: $\mu(A) = 0 \Leftarrow v_1(A) = 0 \wedge v_2(A) = 0 \Leftarrow (v_1+v_2)(A) = v_1(A) + v_2(A) = 0$.
בנוסף $(v_1+v_2)(A) = v_1(A) + v_2(A) = \int_X \frac{dv_1}{d\mu} d\mu + \int_X \frac{dv_2}{d\mu} d\mu = \int_X \frac{dv_1}{d\mu} + \frac{dv_2}{d\mu} d\mu$ לכל $\forall A \in S$. ולכן נגזרת רדון ניקודים של $v_1 + v_2$ היא $\frac{dv_1}{d\mu} + \frac{dv_2}{d\mu}$.

ג) רב"ח: $\mu(A) = 0 \Leftarrow v(A) = 0 \Leftarrow \eta(A) = 0$. בנוסף $\eta(A) = \int_A \frac{d\eta}{dv} dv = \int_X I_A \frac{d\eta}{dv} dv = \int_X I_A \frac{d\eta}{dv}\frac{dv}{d\mu} d\mu = \int_A \frac{d\eta}{dv}\frac{dv}{d\mu} d\mu$ לכל $\forall A \in S$ כאשר השוויון השלישי נובע מסעיף א', עבור $g = \frac{d\eta}{dv}$. ולכן נגזרת רדון ניקודים של η לפי μ היא $\frac{d\eta}{dv}\frac{dv}{d\mu}$.

מידות על $(\mathbb{R}, \boldsymbol{B})$ ופונקציות הצטברות:

ניזכר בכמה עובדות על פונקציה מונוטוניות לא יורדות:

א. נסמן $f_+(x) = \lim_{y\to x^+} f(y)$ ו- $f_-(x) = \lim_{y\to x^-} f(y)$. לפונקציה $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מונוטונית לא יורדות שניהם קיימים וסופיים, ו- $f_+(x) \geq f(x) \geq f_-(x)$. בנוסף אם $a < b$ אז $f_+(a) \leq f_-(b)$.
ב. נסמן $\Delta f(x) = f_+(x) - f_-(x)$ ואז $\Delta f(x) \geq 0$. $\Delta f(x) = 0$ אם ורק אם f רציפה ב- x, ואז $f_+(x) = f(x) = f_-(x)$. $\Delta f(x)$ יקרא הקפיצה של f ב- x.
ג. לכל אוסף סופי של נקודות $x_1, .., x_k$ בקטע $[a, b]$ מתקיים $\sum_{i=1}^k \Delta f(x_i) \leq f(b) - f(a)$ מכך נובע:
   a. לכל $n \in \mathbb{N}$ $\left\{x \in [a,b] | \Delta f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$, אוסף הנקודות ב- $[a, b]$ עם קפיצה גדולה מ- $\frac{1}{n}$, הוא סופי. אחרת לכל $k \in \mathbb{N}$ היינו יכולים לבחור k נקודות משם ולקבל $k \cdot \frac{1}{n} \leq f(b) - f(a)$ בסתירה לסופיות של $f(b) - f(a)$.
   b. $\{x \in [a,b] | \Delta f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^\infty \left\{x \in [a,b] | \Delta f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$ הוא בן מנייה, כאיחוד בן מנייה של קבוצות סופיות.
   c. $\{x \in \mathbb{R} | \Delta f(x) > 0\} = \bigcup_{n=1}^\infty \{x \in [-n,n] | \Delta f(x) > 0\}$ גם בן מנייה. ז"א ש- f יכולה להיות לא רציפה רק באוסף בן מנייה של נקודות.

לכל קטע פתוח (a, b) נגדיר "אורך לפי f של הקטע" $l_f(a,b) = f^-(b) - f^+(a)$. ניתן להגדיר מידה חיצונית לפי f: $m_f^*(A) = \mathrm{Inf}\left\{\sum_{n=1}^\infty l_f(I_n) \,|\, A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty I_n \text{, קטעים פתוחים } I_n\right\}$. וכמו למידה החיצונית הרגילה (שהיא המידה החיצונית לפי פונקציות הזהות $f(x) = x$) מתקיים:

א. $m_f^*(\emptyset) = 0$.

ב. $A \subseteq B \Leftarrow m_f^*(A) \le m_f^*(B)$ (מונוטוניות).
ג. $m_f^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} m_f^*(A_n)$ לכל אוסף בן מנייה $\{A_n\} \subseteq \wp(\mathbb{R})$ (תת-אדטיביות).
ד. לכל קטע סגור
ה. האוסף S_f של הקבוצות E שמקיימות $\forall A \subseteq \mathbb{R}: m_f^*(A) = m_f^*(A \cap E) + m_f^*(A \cap E^c)$ הוא סיגמא אלגברה (בדומה לקבוצות לבג עבור המידה החיצונית הרגילה).
ו. על קבוצה A ב- S_f נסמן $m_f(A)$ במקום $m_f^*(A)$. m_f היא מידה על $(\mathbb{R}, S_f)$.
ז. S_f מכילה את קבוצות בורל, ז"א $B \subseteq S_f$, ולכן m_f היא מידה על $(\mathbb{R}, B)$.
ח. המידה של כל קטע סגור היא $m_f([a,b]) = f_+(b) - f_-(a)$, ובפרט המידה של נקודון היא $m_f(\{a\}) = \Delta f(a)$. לקטעים פתוחים או חצי פתוחים צריך להוריד את המידה של קצוות הקטע ולכן $m_f([a,b)) = f_-(b) - f_-(a)$, $m_f((a,b]) = f_+(b) - f_+(a)$ ו- $m_f((a,b)) = f_-(b) - f_+(a)$.

ניתן להכליל את ההוכחות של התכונות הללו למידת לבג הרגילה כדי שהן יפעלו על מידה של פונקציה מונוטונית. מלבד בסעיף ז' ההכללה היא מידיות, רק צריך להחליף לפעמים "x" ב- "$f_-(x)$" או "$f_+(x)$". וצריך לדעת איפה לשים כל אחד מהם. סעיף ז' טיפה קשה יותר אבל עדיין ברמה של תרגיל בית.

הערות:

א. תכונה אחת שלא מתקיימת היא סגירות להזזה, ייתכן ש- $m_f^*(A+a) \neq m_f^*(A)$.
ב. נשים לב שבשום מקום לא השתמשנו בערך של $f(a)$ בנקודת קפיצה. ולכן שינו הערך הזה לא ישנה את המידה. בגלל זה נהוג "לנרמל" את הפונקציה ולשנות את הערך של $f(a)$ ל- $f_+(a)$. מה שאומר ש- f היא רציפה מימין.
ג. גם הוספת קבוע ל- f לא תשנה את המידה, ויש כיוון הפוך. שתי פונק' מונוטוניות לא ירודות רציפות מימין יגדירו אותה מידה אם ורק אם הן נבדלות בקבוע.
ד. למעשה, כל מידה μ על $(\mathbb{R}, B)$ שהיא סופית על קטעים חסומים היא מהצורה הזאת. פשוט מגדירים
$$f(x) = \begin{cases} \mu((0,x]) & x > 0 \\ -\mu((x,0]) & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
ואז f מונוטונית לא יורדת, רציפה מימין ו- $\mu(A) = m_f(A)$. לכל קבוצת בורל A.

אז מה הקשר בין זה לבין מידות רב"ח, מידות מאונכות ורדון נקודים? פשוט. סביר להניח שלמידה "יפה" תתאים פונקציה "יפה", ואם רוצים דוגמא למידה "מכוערת" אפשר פשוט לבחור פונקציה "מכוערת". נראה זאת בשני תרגילים.

תרגיל 2:

תהי f מונוטונית לא יורדת. הוכח שהמידה m_f רציפה בהחלט (לפי m, מידת לבג הרגילה) אם ורק אם f רציפה בהחלט בכל קטע סגור $[a,b]$, והבע את $\frac{dm_f}{dm}$ לפי f.

פתרון:

בשביל לפשט דברים ניזכר קודם לב קודם שאם f רציפה אז $f_+(x) = f(x) = f_-(x)$, ולכן המידה של כל קטע בין a ל- b פתוח או סגור, היא $f(b) - f(a)$ ולא צריך להתבלבל עם ה- "+" וה- "-".

כיוון ראשון: את הכיוון הזה לא הספקתי בכיתה נניח ש- f רב"ח בכל קטע סגור (בפרט f רציפה). צריך להוכיח שאם $m(A) = 0$ אז $m_f(A) = 0$. נחלק לשני מקרים:

א. נניח קודם ש- A חסומה, ולכן יש $a<b$ כך ש- $A\subseteq(a,b)$. יהי $\epsilon>0$, ננסה להוכיח ש- f . רב"ח ב- $[a,b]$ ולכן יש $\delta>0$ כך שלכל אוסף בן מנייה של קטעים זרים $\{(x_n,y_n)\}_n$ שמוכלים ב- $[a,b]$ ומקיימים $\sum_{n=1}^{\infty}y_n-x_n\le\delta$ מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty}f(y_n)-f(x_n)\le\epsilon$ למדנו לפני הרבה זמן (שיעור שני?) שלכל קבוצה מדידה E יש קבוצה פתוחה $E\subseteq O$ המקיימת $m(O)\le m(E)+\delta$. קבוצה פתוחה היא איחוד בן מנייה זר של קטעים פתוחים $O=\bigcup_{n=1}^{\infty}(x_n,y_n)$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}y_n-x_n=\sum_{n=1}^{\infty}m(x_n,y_n)=m(O)\le m(E)+\delta$.
בפרט במקרה שלנו יש אוסף בן מנייה של קטעים פתוחים זרים שמקיים $A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(x_n,y_n)$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty}y_n-x_n\le m(A)+\delta=\delta$. בה"כ $\forall n: a\le x_n$ אחרת נחליף את x_n ב- a. סכום האורכים של הקטעים יכול רק לקטון מזה, ולכן הוא יישאר קטן מ- δ, ו A יישאר מוכל באיחוד הקטעים שכן בגלל ש- $A\subseteq(a,b)$. בדומה ניתן להניח ש- $\forall n: y_n\le b$ ולכן כל הקטעים (x_n,y_n) מוכלים ב- $[a,b]$.
כעת סוף סוף ניתן להשתמש ברציפות בהחלט, שאומרת ש-
$\sum_{n=1}^{\infty}m_f(x_n,y_n)=\sum_{n=1}^{\infty}f(y_n)-f(x_n)\le\epsilon$ ולפי תת אדטיבית (כזכור $A\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}(x_n,y_n)$) נקבל ש- $m_f(A)\le\sum_{n=1}^{\infty}m_f(x_n,y_n)\le\epsilon$.

ב. אם A לא חסומה אז לכל n וכן $m(A\cap[-n,n])\le m(A)=0$. בנוסף $A\cap[-n,n]$ קבוצה חסומה ולפי א' $m_f(A\cap[-n,n])=0$. כעת $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A\cap[-n,n])$ ולפי תת אדטיביות $m_f(A)\le\sum_{n=1}^{\infty}m_f(A\cap[-n,n])=0$.

בכיוון השני נניח ש- m_f רב"ח. נציין קודם שלכל x $m(\{x\})=0$ ולכן $\Delta f(x)=m_f(\{x\})=0$ ולכן f רציפה. כעת לכל קטע $a<b$ מתקיים $\forall x\in[a,b]: f(x)-f(a)=m_f\big((a,x)\big)=\int_{(a,x)}dm_f=\int_a^x\frac{dm_f}{dm}dm$. השוויון הראשון הוא הגדרת m_f, השני תכונה ידוע של אינטגרל והשלישי הוא הגדרת נגזרת רדון ניקודים. לפי אחת ההכללות של המשפט היסודי של האינפי'. f רב"ח ב- $[a,b]$ ו- $f'=\frac{dm_f}{dm}$ כב"מ. ($\frac{dm_f}{dm}$ רק מוגדרת עד כדי כב"מ אז אפשר לומר סתם ש- $f'=\frac{dm_f}{dm}$).

תרגיל 3:

מצאו מידה μ על $([0,1],B)$ שמקיימת:

א. μ מאונכת למידת לבג m.
ב. $\mu(\{x\})=0$ לכל נקודה $x\in[0,1]$.
ג. $\mu([0,1])=1$.

פתרון: כמובן שנחפש מידה מהצורה $\mu=m_f$ עבור איזשהי f מונוטונית לא יורדת, אבל איזו f? בשביל ש-ב' יתקיים צריך שלכל נקודה x יתקיים . $\Delta f(x)=m_f(\{x\})=0$. זה אומר שאנחנו מחפשים f רציפה. ובשביל ג' צריך ש- $f(1)-f(0)=m_f([0,1])=1$.

עד כאן זה קל, אבל מה עם א'? בשביל ש- m_f תהיה מאונכת למידת לבג צריך פונקציה f מוזרה, אז ניקח את הפונקציה הכי מוזרה שראינו בקורס – פונקציית קאנטור. הרי אנחנו יודעים שהיא רציפה, מונוטונית לא יורדת וש- $f(1)-f(0)=1$, ואם זאת היא מוזרה. צריך למצוא קבוצה A כך ש- $m(A)=0$ ו- $m_f(A^c)=0$, איזו קבוצה הולכת עם פונקציית קאנטור? קבוצת קנטור! אכן קבוצת קנטור C מקיימת $m(C)=0$, אבל מה אם $m_f(C^c)=0$?

על קטע (a,b) שבו פונקציה רציפה f קבועה $m_f\big((a,b)\big)=f(b)-f(a)=0$, ואנחנו זוכרים ש- C^c הוא איחוד בן מנייה זר של קטעים פתוחים, וש- f קבועה על כל אחד מהקטעים הללו, ולכן המידה m_f של כל קטע כזה היא 0, ולפי סיגמא אדטיביות המידה m_f של C^c היא 0. וסיימנו.

היטלים במרחב הילברט:

ניזכר:

א. שבמרחב הילברט H הסגור של תת מרחב וקטורי V, $\bar{V}$, הוא בעצמו תת מרחב וקטורי (והוא סגור).
ב. שתת מרחב וקטורי סגור הוא בעצמו מרחב הילברט.
ג. שלתת מרחב וקטורי סגור V, לכל נקודה $a \notin V$ יש היטל $a_V \in V$ שהוא מינימאלי ביחס למרחק עם a. ז"א $\|a_V - a\| = \min\{\|v - a\| | v \in V\}$.

תרגיל 4: לא הספקתי בשיעור.

אם V ו- U שני תתי מרחבים סגורים אז $V \cap U$ תת מרחב סגור ואם נטיל לתוך V ואז לתוך $V \cap U$ נקבל אותה תוצאה כמו להטיל ישר לתוך $V \cap U$. ז"א $(a_V)_{V\cap U} = a_{V\cap U}$.

פתרון: כזכור מהרצאה, מספיק להוכיח ש- $a - (a_V)_{V\cap U}$ מאונך לכל איבר $w \in V \cap U$. אבל $a - (a_V)_{V\cap U} = a - a_V + a_V - (a_V)_{V\cap U}$. לפי ההגדרה:

א. $a - a_V$ מאונך לכל $w \in V$ (כי a_V היטל של a ל- V) ובפרט לכל $w \in V \cap U$.
ב. $a_V - (a_V)_{V\cap U}$ מאונך לכל $w \in V \cap U$ (כי $(a_V)_{V\cap U}$ היטל של a_V ל- $V \cap U$).

ביחד לכל $w \in V \cap U$ $\langle a - (a_V)_{V\cap U}, w\rangle = \langle a - a_V, w\rangle + \langle a_V - (a_V)_{V\cap U}, w\rangle = 0$ וסיימנו.

לתוך V לא סגור אין הטלות, אבל זה לא מפתיע. הרי תמיד ישנו היטל ב- $\bar{V}$, אבל למה שהוא יהיה בתוך V? אם הוא במקרה כבר בתוך V הכול סבבה, אבל אם לא אין דרך להטיל אותו יותר פנימה לתוך $V \cap \bar{V} = V$. למה?

כי אם $a \in \bar{V} \setminus V$ אז לפי ההגדרת $\bar{V}$ יש סדרה $a_n \in V$ כך ש- $\|a - a_n\| \to 0$ ובפרט $\inf\{\|v - a\| | v \in V\} = 0$. אילו היה מינימום a_V שממשש את זה אז $\|a - a_V\| = 0$ ולכן $a = a_V \in V$ בסתירה להנחה.

לדוגמא, נביט בתת המרחב של $L^2[0,1]$ שמורכב מכל הפונקציות הרציפות ב- $[0,1]$. וניקח פונקציה $h(x) = \begin{cases} 1 & x \ge \frac{1}{2} \\ 0 & x < \frac{1}{2} \end{cases}$. אפשר לקרב את זה למשל ע"י $h(x) = \begin{cases} 1 & x \ge \frac{1}{2} \\ 0 & x \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ nx - \frac{n}{2} + 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x < \frac{1}{2} \end{cases}$ וראינו איורים של זה בכיתה. אבל $h(x)$ לא רציפה וגם לא שקול במ"ש לפונקציה רציפה (שינוי של הערכים בקבוצה במידה 0 לא ישנה את זה שרוה הערכים מיד לפני $x = \frac{1}{2}$ הם 0 ורוב הערכים מיד אחריו הם 1, מה שמונע רציפות).

הערה: זה מראה שמרחב הפונקציות הרציפות ב- $[0,1]$ לא סגור בנורמת L^2, האמת היא שהסגור שלו הוא כל $L^2[0,1]$ שכן ניתן לקרב כל פונקציה ע"י הסכומים החלקיים של טור הפורייה שלה. אבל זה חומר של אנליזת פורייה.

הדואליות של l^p ו- l^q:

לפעמים כדי לדעת איך נראה מרחבי הפונקציונלים הרציפים $V^* = Hom(V, \mathbb{R})$ של מרחב בנך מסוים, כאשר V עצמו הוא מרחב וקטורי עם נורמה, נורמת האופרטור שלמדתם עליה. אני לא אכנס לפרטים ופשוט אתן תרגיל:

יהי $1 < p < \infty$ ו- $q = \frac{p}{p-1}$ המספר הדואלי שלו ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). הראו שכל פונקציונל ליניארי רציף $T: l^p \to \mathbb{R}$ הוא מהצורה $T((a_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ עבור $(b_n)_{n=1}^{\infty} \in l^q$ כלשהו.

כמה שלבים:

א. היה אופרטור $T: l^p \to \mathbb{R}$, לפני שאפשר להוכיח משהו צריך להבין מה הם אותם b_n שאנחנו מחפשים. אילו זה היה נכון ש- $T((a_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ לכל סידרה $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in l^p$ אז בפרט $T(e_i) = \sum_{n \neq i} 0 b_n + 1 b_i = b_i$ (כאשר e_i היא הסדרה עם 1 במקום ה- i, ו- 0 בכל מקום אחר). ולכן $T(e_i) = b_i$ הם המועמדים היחידים האפשריים.

ב. עבור סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סופית, ז"א שיש N עבורו לכל $N < n$ $a_n = 0$, מתקיים ש- $a = (a_1, a_2, \dots, a_N, 0,0, \dots) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \dots + a_N e_N = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n$ ולפי הליניאריות של T:

$$T(a) = T\left(\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\right) = \sum_{n=1}^{N} a_n T(e_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

השוויון האחרון נובע מזה שלכל $N < n$ $a_n = 0$.מתקיים

ג. עבור סידרה כללית $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in l^p$ נגדיר סדרות $\left(a_n^k\right)_{n=1}^{\infty}$ סופיות כ- $a_n^k = \begin{cases} a_n & n \leq k \\ 0 & k < n \end{cases}$.
למשל $a^1 = (a_1, 0,0,0, \dots)$, $a^2 = (a_1, a_2, 0,0, \dots)$, $a^3 = (a_1, a_2, a_3, 0, \dots)$ וכך האלה.
בפרט $a - a^k = (0,0, \dots, 0, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots)$, זה הזנב של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in l^p$ שמתחיל מהאיבר ה- $k+1$. מכך יוצא ש- $\left\|a - a^k\right\|_p^p = \sum_{n=k+1}^{\infty} |a_n|^p \to 0$ כי זה הזנב שלהטור המתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p$ (הטור הזה מתכנס כי הסדרה ב- l^p) וזנב של טור מתכנס שואף ל-0.
יוצא ש- a^k שואף ל- a בנורמת l^p, ולפי רציפות T:

$$T(a) = \lim_{n \to \infty} T\left(a^k\right) = \lim_{n \to \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k b_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{n=1}^{k} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$$

השוויון השני הוא מסעיף ב', והשלישי הוא מהגדרת $\left(a_n^k\right)_{n=1}^{\infty}$.

ד. הראנו ש- $T((a_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, אבל למה $(b_n)_{n=1}^{\infty} \in l^q$? צריך להוכיח ש- $\|b\|_q = \sqrt[q]{\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^q} < \infty$. נשתמש בכל ש T- חסום, ז"א

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{|T(a)|}{\|a\|_p} \middle| a \in l^p\right\} < \infty$$

לכל $k \in \mathbb{N}$ נביט בסדרה $c_n^k = \begin{cases} \operatorname{sgn} b_n \, |b_n|^{\frac{q}{p}} & n \leq k \\ 0 & k < n \end{cases}$. נשים לב ש- $q = \frac{p}{p-1}$ גורר ש- $q - 1 = \frac{p}{p-1} - \frac{p-1}{p-1} = \frac{1}{p-1} = \frac{q}{p}$.

היא מקיימת $\left\|c^k\right\|p = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{k} \left|\operatorname{sgn} b_n \, |b_n|^{\frac{q}{p}}\right|^p} = \sqrt[p]{\sum_{n=1}^{k} |b_n|^q}$ ו-

$$T\left(c^k\right) = \sum_{n=1}^{k} |b_n|^{\frac{q}{p}} b_n \operatorname{sgn} b_n = \sum_{n=1}^{k} |b_n|^{q-1} |b_n| = \sum_{n=1}^{k} |b_n|^q$$

צריך להתקיים $\sum_{n=1}^{k} |b_n|^q = T\left(c^k\right) \leq D\left\|c^k\right\| = D\sqrt[p]{\sum_{n=1}^{k} |b_n|^q}$ ולכן

$$\|T\| \geq \frac{\left|T\left(c^k\right)\right|}{\|c^k\|_p} = \frac{\sum_{n=1}^{k}|b_n|^q}{\sqrt[p]{\sum_{n=1}^{k}|b_n|^q}} = \left(\sum_{n=1}^{k}|b_n|^q\right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{k}|b_n|^q\right)^{\frac{p-1}{p}}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{k}|b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{\sum_{n=1}^{k}|b_n|^q} \to \sqrt[q]{\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^q} = \|b\|_q$$

מצאנו אם כן ש- $\infty > \|T\| \geq \|b\|_q$.

ה. נעשה טיפה יותר, נראה ש- $\|T\| = \|b\|_q$. נשאר להראות ש- $\|T\| \leq \|b\|_q$ ולפי ההגדרה של $\|T\|$ מספיק להראות שלכל $a \in l^p$ מתקיים $\frac{|T(a)|}{\|a\|_p} \leq \|b\|_q$, ז"א $|T(a)| \leq \|a\|_p \|b\|_q$, ז"א $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right| \leq \|a\|_p \|b\|_q$. אבל זה ידוע – זה אי שוויון בסל.