

B.8 חלק ממשפט

אם D בפנים של $\sphericalangle CAB$ אז:

ב. אין שום נקודה בקרן ההפוכה ל- \overrightarrow{AD} בפנים של $\sphericalangle CAB$.

הוכחה

יודעים ש-A לא בפנים של $\sphericalangle CAB$.

ניקח נקודה P על הקרן ההפוכה ל- \overrightarrow{AD} . לפי הגדרה של קרן הפוכה ואקסיומה 3 - B מדובר בכל הנקודות של הקרן ההפוכה ל- \overrightarrow{AD} , כלומר מתחילה ב-A לכיוון השני.

לפי אקסיומה 3 - B והנקודות P, A, D אז האפשרות היחידה להיות בקרן ההפוכה היא $P * A * D$.

לכן הקטע PD חותך את \overrightarrow{AC} ב-A ולפי הגדרה P ו- D בצדדים שונים של הישר \overrightarrow{AC} ונתון ש-D בפנים של $\sphericalangle CAB$, כלומר ידוע ש-B ו- D באותו צד של $\overrightarrow{AC} \Leftarrow$ לפי אקסיומה 4 - B (1), P ו- B בצדדים שונים של הישר \overrightarrow{AC} , כלומר לא מתקים אחד התנאים לכך ש-P בפנים של $\sphericalangle CAB$ (כי היא צריכה להיות באותו מד של \overrightarrow{AC} כמו B).

לכן P לא בפנים של $\sphericalangle CAB$.

ג. אם $C * A * E$ אז B בפנים של $\sphericalangle DAE$.

הוכחה

מכיוון שנתון $C * A * E$ לפי אקסיומה 1 - B הנקודות C, A, E על אותו ישר. נתון גם ש-D בפנים של $\sphericalangle CAB$, לכן B ו- D באותו צד של \overrightarrow{AE} ששווה ל- \overrightarrow{AC} .

נשאר להוכיח כי B ו- E באותו צד של \overrightarrow{AD} .

מכיוון שנתון $C * A * E$, הקטע CE פוגש את \overrightarrow{AB} בנקודה A, לכן C, E בצדדים שונים של \overrightarrow{AB} עפ"י הגדרה של צד.

מכיוון ש-D בפנים של $\sphericalangle CAB$, C, D באותו צד של \overrightarrow{AB} לכן D, E בצדדים שונים של \overrightarrow{AB} .

לפי הלמה כל נקודה על הקרן \overrightarrow{BE} חוץ מ-B היא באותו צד של \overrightarrow{AB} כמו E וכל נקודה על \overrightarrow{AD} חוץ מ-A היא באותו צד של \overrightarrow{AB} כמו D. לכן כל נקודה על \overrightarrow{BE} חוץ מ-B היא בצד שונה של \overrightarrow{AB} מאשר כל נקודה על \overrightarrow{AD} חוץ מ-A ובפרט \overrightarrow{AD} לא פוגשת את הקטע BE - אין נקודה משותפת.

לפי ב', B ו- P בצדדים שונים של $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$, לפי הלמה כל נקודה על הקרן \overrightarrow{EB} חוץ מ-E היא באותו צד של \overrightarrow{AE} כמו B וכל נקודה על \overrightarrow{AP} חוץ מ-A היא באותו צד של \overrightarrow{AE} כמו P. לכן הנקודות על \overrightarrow{EB} בצדדים שונים של \overrightarrow{AE} מאשר הנקודות על הקרן \overrightarrow{AP} . ובפרט \overrightarrow{AP} לא פוגשת את הקטע EB.

לפי משפט B1 (2) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AP} \cup \overrightarrow{PA}$. לכן הישר \overrightarrow{AD} לא נחתך עם BE, כלומר B, E באותו צד של \overrightarrow{AD} .