

אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 11

שאלה 1

תהי K/F הרחבת גלואה ממימד סופי.

1. יהיו L, L' שדות ביניים של ההרחבה K/F . נגדיר $H = \text{Gal}(K/L)$, $H' = \text{Gal}(K/L')$. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים.
 - a. קיים F -איזומורפיזם של שדות $L \rightarrow L'$ σ .
 - b. קיים $g \in \text{Gal}(K/F)$ כך ש- $H' = g^{-1}Hg$.
2. יהי p מספר ראשוני. הוכיחו שקיים שדה ביניים $F \subseteq L_p \subseteq K$ כך ש- $\gcd(p, [L_p:F]) = 1$ ו- $[K:L_p] = p$ הוא חזקה של p . יותר מכך, הוכיחו כי השדה L_p יחיד עד כדי F -איזומורפיזם. [רמז: משפטי סילוב]

שאלה 2

1. נחשוב על S_{n-1} כתת חבורה של S_n . הראו כי לא קיימת תת-חבורה $S_{n-1} \subsetneq H \subsetneq S_n$.
2. יהי F שדה, f פולינום ממעלה n ו- E שדה הפיצול של f מעל F . נניח כי $[E:F] = n!$ ויהי $\alpha \in E$ שורש של f . הראו כי לא קיים שדה K כך ש- $F[\alpha] \subsetneq K \subsetneq F$.

שאלה 3

1. הוכיחו או הפריכו: אם $F \subseteq K \subseteq L$ שדות כך ש- K/F גלואה ממימד סופי ו- L/K גלואה ממימד סופי אז L/F גלואה.
2. הוכיחו או הפריכו: אם K שדה פיצול של פולינום אי פריק ממעלה n מעל F אז ב- $\text{Gal}(K/F)$ יש איבר מסדר n . [רמז: משפט האבר הקדום]

בונוס

הוכיחו או הפריכו: לכל הרחבת שדות אלגברית L/F (לאו דווקא ממימד סופי) ו- $\sigma \in \text{Gal}(L/F)$ קיים n כך ש- $\sigma^n = id_L$.