פתרון בוחן בבדידה 2 למהנדסים, 83-118, סמסטר ב, ה'תש"ף

כ"ד אייר ה'תש"ף, 18/5/2020

מרצה: תומר באואר.

מתרגל: אריאל ויצמן.

- יש לענות על כל השאלות.
- הקפידו על סדר וניקיון.
- נא לנמק ולהוכיח כל תשובה.
- משך הבוחן: שעה וחצי.
- חומר עזר: דף הנוסחאות ומחשבון פשוט בלבד.
- אין צורך לפשט ביטויים כמו $\frac{2549!}{236!}$...

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. בראש העמוד הראשון של הפתרון אותו תשלח אלינו נא הצהר/י: "אני מתחייב/ת לעמוד בכללי טוהר הבחינות של האוניברסיטה".

2. נסמן ב־s את סכום 4 הספרות האחרונות בת"ז שלך. חברת "התפרן" מעסיקה 60 עובדים, שאחד מהם הוא המנהל. החברה קיבלה תרומה של s מסרגות בעוביים שונים (נניח 1 מ"מ עד s מ"מ) ושל $3s$ פקעות חוטי זהב זהות. התרומה מותנית שכולה תנתן לעובדים תחת שלושה תנאים שכולם צריכים להתקיים יחד:

1. כל עובד יקבל לכל היותר מסרגה אחת.
2. אף עובד לא יקבל גם מסרגה וגם פקעות חוטי זהב.
3. כל עובד פרט למנהל יקבל מספר זוגי של פקעות חוטי זהב (והמנהל יכול לקבל כמה פקעות שרוצים).

(א) בכמה דרכים ניתן לחלק את התרומה לעובדי "התפרן" אם המנהל לא קיבל מסרגה? (16 נק')

(ב) בכמה דרכים ניתן לחלק את התרומה לעובדי "התפרן" אם המנהל קיבל מסרגה? (16 נק')

<u>פתרון:</u>

א. חלוקת המסרגות: זו בחירה של s מתוך 59 בלי חזרה (מותר לכל היותר אחת) ועם חשיבות לסדר (כי המסרגות שונות): $59^{\underline{s}} = \frac{59!}{s!}$.

חלוקת החוטים: צריך לחלק את $3s$ חוטי הזהב ל $60-s$ הנותרים, עם חזרה ובלי חשיבות לסדר, ועם תנאי נוסף שכולם פרט למנהל יקבלו מס' זוגי. נמספר אתהמנהל ב1, ואת שאר העובדים שנותרו שרירותית מ־2 עד $60-s$. מספר האפשרויות לחלק את החוטים הוא כמספר הפתרונות של המשוואה

$$\sum_{i=1}^{60-s} x_i = 3s$$

כאשר x_i זוגי לכל $2 \leq i \leq 60-s$. אם s זוגי מתחייב שגם x_1 זוגי, ולכן כולם זוגיים. נקבל שמספר פתרונות המשוואה לעיל הוא כמספר פתרונות המשוואה הבאה:

$$\sum_{i=1}^{60-s} \frac{x_i}{2} = \frac{3s}{2}$$

כאשר $\frac{x_i}{2} \geq 0$ ושלם לכל i. לכן נקבל:

$$\left(\!\!\binom{60-s}{\frac{3s}{2}}\!\!\right)$$

ובסה"כ הפתרון הוא:

$$59^{\underline{s}} \cdot \left(\!\!\binom{60-s}{\frac{3s}{2}}\!\!\right)$$

אם s אי־זוגי אז מתחייב ש־ x_1 אי־זוגי (ובפרט $x_1 \geq 1$). הרעיון: להוריד 1 מ־x_1 ומאגף ימין, ואז לחלק את כל המשוואה ב־2, וכך נקבל שכל המשתנים גדולים מ או שווים ל־0, כדרוש. כלומר, נסמן $y_1 = \frac{x_1-1}{2}$ וכן $\forall i \geq 2 : y_i = \frac{x_i}{2}$ ונקבל שמספר פתרונות המשוואה לעיל הוא כמספר פתרונות המשוואה הבאה:

$$\sum_{i=1}^{60-s} y_i = \frac{3s-1}{2}$$

כאשר $y_i \geq 0$ ושלם. ולכן נקבל:

$$\left(\!\!\binom{60-s}{\frac{3s-1}{2}}\!\!\right)$$

ובסה"כ הפתרון הוא:

$$59^{\underline{s}} \cdot \left(\!\!\binom{60-s}{\frac{3s-1}{2}}\!\!\right)$$

ב. כאשר המנהל קיבל מסרגה: חלוקת החוטים: שימו לב שאם s אי־זוגי אין דרך לחלק את החוטים (כי המנהל לא מקבל חוט, ולכן מי שמקבל מקבל מס' זוגי והסכום יוצא זוגי בסתירה), ולכן יש 0 אפשרויות במקרה זה.

אם s זוגי אז בדומה ללעיל יש $\left(\!\binom{60-s}{\frac{3s}{2}}\!\right)$ אפשרויות לחלוקת החוטים.

חלוקת המסרגות: s אפשרויות למסרגה של המנהל, ועוד $59^{\underline{s-1}}$ לשאר, כלומר:

$$59^{\underline{s-1}} \cdot s$$

ובסה"כ:

$$59^{\underline{s-1}} \cdot s \cdot \left(\!\!\binom{60-s}{\frac{3s}{2}}\!\!\right)$$

אפשרויות.

3. יהי $\alpha \in \mathbb{C}$. (כל סעיף 11 נק')

(א) הוכח/י:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} 3^k = 4^\alpha$$

(ב) הוכח/י:

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} 3^k = \frac{4^{n+1} - 3^{n+1}}{n+1}$$

(ג) מצא/י $\alpha \notin \mathbb{Z}$ כך שמתקיים:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} 3^k \in \mathbb{N}$$

פתרון:

א. פשוט להציב בנוסחת הבינום המוכלל $x = 1, y = 3$.

ב. אפשרות אחת: אינטגרל $\int_0^1 f(x)dx$ של הפונקציה

$$f(x) = (x+3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k x^{n-k}$$

אפשרות שנייה: להכפיל ב־$n+1$ ולהעביר את 3^{n+1} אגף ואז בעצם יש שם את הפיתוח של $(1+3)^{n+1} = 4^{n+1}$, שזה בעצם סעיף א עם $\alpha = n$.

ג. בהמשך לסעיף א: ואז לקחת $\alpha = \frac{1}{2}$ כי $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$.

4. נסמן ב־s את סכום ארבע הספרות האחרונות בת.ז. שלך.

(א) מצא/י את המקדם של $x^s y^{s-1}$ בפיתוח הביטוי $(1-x-y)^{40}$. (10 נק')

(ב) מצא/י את המקדם של y^s בפיתוח הביטוי $(y^3+y^8-2)^{35}$. (10 נק')

(ג) עובדה: ישנם $C_1,C_2\in\mathbb{N}$ כך שמתקיים: $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{100}=C_1+C_2\sqrt{6}$.

מצא/י את C_1,C_2 כסכום של מספרים טבעיים (אין צורך לפשט הלאה). (15 נק')

<u>**פתרון:**</u>

א. אפתור לפי $s=17$. מחפשים את המקדם של $x^{17}y^{16}$, כאשר מתקיים:

$$(1-x-y)^{40}=\sum_{a+b+c=40}\binom{40}{a,b,c}1^a(-x)^b(-y)^c=\sum_{a+b+c=40}\binom{40}{a,b,c}(-1)^{b+c}x^by^c$$

לכן דרוש $b=17,c=16$ ולכן $a=7$, ונקבל שהמקדם הוא:

$$-\binom{40}{7,17,16}$$

ב. כאן מחפשים את המקדם של y^{17}, כאשר הוא מתקבל מהכפלות של y^3,y^8.

נבחן את האפשרויות לקבל y^{17}:

אם y^8 לא נבחר אז לא ניתן לקבלו רק בעזרת y^3.

אם y^8 נבחר פעם אחת אז בחירת 3 פעמים y^3 (כלומר, $(y^3)^3=y^9$) תיתן לנו את המבוקש, ואז נותר לבחור 31 פעמים את -2, והמקדם הוא: $\binom{35}{3,1,31}(-2)^{31}=-2^{31}\binom{35}{3,1,31}$.

אם y^8 נבחר פעמיים מקבלים y^{16} ואז לא ניתן להגיע ל-y^{17} עם כפולות של 3.

וכמו כן אם y^8 נבחר יותר מפעמיים לא ניתן לקבל y^{17}. לכן התשובה היא:

$$-2^{31}\binom{35}{3,1,31}$$

ג. אפשר לפתור ישירות לפי משפט הבינום: מתקיים:

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{100}=\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\sqrt{2}^{100-k}\sqrt{3}^k$$

נשים לב שכאשר k זוגי אז גם $100-k$ זוגי, ואז נקבל: $\sqrt{2}^{100-k}=2^{\frac{100-k}{2}},\sqrt{3}^k=3^{\frac{k}{2}}$. כאשר k אי זוגי אז גם $100-k$ אי זוגי ואז נקבל: $\sqrt{2}^{100-k}=$

$2^{\frac{100-k-1}{2}}\sqrt{2}, \sqrt{3}^k = 3^{\frac{k-1}{2}}\sqrt{3}$. לכן נחלק את הסכום לעיל לסכום על הזוגיים ועל האי־זוגיים בנפרד:

$$= \sum_{\substack{0\le k\le 100 \\ k \text{ is even}}} \binom{100}{k} \cdot 2^{\frac{100-k}{2}} \cdot 3^{\frac{k}{2}} + \sum_{\substack{0\le k\le 100 \\ k \text{ is odd}}} \binom{100}{k} \cdot 2^{\frac{100-k-1}{2}} \cdot 3^{\frac{k-1}{2}} \cdot \underbrace{\sqrt{2}\sqrt{3}}_{\sqrt{6}} =$$

$$= \sum_{\substack{0\le k\le 100 \\ k \text{ is even}}} \binom{100}{k} \cdot 2^{\frac{100-k}{2}} \cdot 3^{\frac{k}{2}} + \sqrt{6} \cdot \sum_{\substack{0\le k\le 100 \\ k \text{ is odd}}} \binom{100}{k} \cdot 2^{\frac{100-k-1}{2}} \cdot 3^{\frac{k-1}{2}}$$

ולכן נקבל:

$$C_1 = \sum_{\substack{0\le k\le 100 \\ k \text{ is even}}} \binom{100}{k} \cdot 2^{\frac{100-k}{2}} \cdot 3^{\frac{k}{2}}, C_2 = \sum_{\substack{0\le k\le 100 \\ k \text{ is odd}}} \binom{100}{k} \cdot 2^{\frac{100-k-1}{2}} \cdot 3^{\frac{k-1}{2}}$$

דרך נוספת:

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{100} = \left(\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2\right)^{50} = (5+2\sqrt{6})^{50}$$

ואז לפתח לפי הבינום, עם חלוקה לזוגיים ואי־זוגיים, כי חזקה זוגית של שורש נותנת מס' טבעי:

$$= \sum_{k=0}^{50} \binom{50}{k} 5^{50-k} 2^k \sqrt{6}^k = \sum_{\substack{0\le k\le 50 \\ k \text{ is even}}} \binom{50}{k} 5^{50-k} 2^k 6^{\frac{k}{2}} + \sqrt{6} \cdot \sum_{\substack{0\le k\le 50 \\ k \text{ is odd}}} \binom{50}{k} 5^{50-k} 2^k 6^{\frac{k-1}{2}}$$

וכמובן כאשר k זוגי נקבל $\frac{k}{2}$ טבעי, וכאשר k אי־זוגי אז $\frac{k-1}{2}$ טבעי ולכן בתוך הסכומים הכל מספרים טבעיים ונוכל לבחור:

$$C_1 = \sum_{\substack{0\le k\le 50 \\ k \text{ is even}}} \binom{50}{k} 5^{50-k} 2^k 6^{\frac{k}{2}}, C_2 = \sum_{\substack{0\le k\le 50 \\ k \text{ is odd}}} \binom{50}{k} 5^{50-k} 2^k 6^{\frac{k-1}{2}}$$