תרגיל בית 3 אלגברה מופשטת 2

1. תארו את האיברים ההפיכים של $\mathbb{Z}_4[x]$.

2. הוכיחו כי $R[[x]][x^{-1}] = R((x))$.

3. יהי F שדה. נסמן $R_1 = F[x]$. לכל $n \geq 0$, נגדיר את החוג $R_n = F\left[x^{1/n!}\right]$.
נשים לב שמתקיים $R_1 \subseteq R_2 \subseteq R_3 \subseteq \ldots$ שכן בכל שלב אנחנו מוסיפים איבר שהוא שורש $t^n = x^{1/(n-1)!}$.
כעת נסתכל על האיחוד $R = \bigcup_n R_n$ - זהו חוג.

   (א) הראו כי לכל $0 < r \in \mathbb{Q}$, $x^r \in R$. השתכנעו שאיברי R הם סכום של איברים מהצורה αx^r עבור $\alpha \in F$, $0 < r \in \mathbb{Q}$.

   (ב) הראו שכל החוגים R_n איזומורפיים זה לזה, אבל R לא איזומורפי להם.

4. הוכח שב $M_n(F)$ אין מערכת של $(n+1) \times (n+1)$ יחידות מטריצות.

5. הוכח שאין שיכון (עם יחידה) $M_2(F) \hookrightarrow M_3(F)$.