לינארית 1 - תרגיל 5

מתרגלים: עוזי, עדי, יעל ואחמד.

תאריך הגשה: בשבוע של העשירי לדצמבר

תרגיל 1. ציין האם הקבוצות הבאות ת"ל או בת"ל, ובמקרה של ת"ל יש להציג את אחד הווקטורים כצירוף ליניארי של השאר.

1. $$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}$$

פתרון. אנחנו מחפשים α, β, γ לא טריוואלים (לפחות אחד שונה מ-0) כך ש-

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר זה שקול לפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

כלומר $\gamma = 1, \beta = -2, \alpha = 1$ פותר את המערכת לכן

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

מכאן

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2. $$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

פתרון. אנחנו מחפשים α, β, γ לא טריוואלים (לפחות אחד שונה מ-0) כך ש-

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כלומר זה שקול לפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & 8 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & -17 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 7 & 0 \\ 0 & -6 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array} \right)$$

כלומר $\alpha=0,\beta=0,\gamma=0$ הוא הפתרון היחיד של המערכת ולכן B_2היא קבוצה בתל

3. $B_3=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$

פתרון. אנחנו מחפשים α,β,γ לא טריוואלים (לפחות אחד שונה מ-0) כך ש-

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר זה שקול לפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&1&0\\2&1&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&4&1&0\\0&-7&-1&0\end{array}\right)$$

כלומר $\alpha=-3,\beta=-1,\gamma=7$ פותר את המערכת לכן

$$-3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

מכאן

$$-3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

4. $B_4=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$

פתרון. אנחנו מחפשים α,β,γ לא טריוואלים (לפחות אחד שונה מ-0) כך ש-

$$\alpha\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר זה שקול לפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&2&0\\0&3&1&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&2&0\\0&0&-5&0\end{array}\right)$$

כלומר $\alpha=1000,\beta=0,\gamma=0$ פותר את המערכת לכן

$$1000\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

מכאן

$$0\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

5. $B_5=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

פתרון. אנחנו מחפשים $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon$ לא טריוואלים (לפחות אחד שונה מ-0) כך ש-

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}+\epsilon\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר זה שקול לפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccccc|c}1&1&1&1&1&0\\0&1&1&1&1&0\\0&0&1&1&1&0\\0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&1&0\end{array}\right)$$

המטריצה כבר מדורגת והפתרון היחיד שלה הוא $\alpha=\beta=\gamma=\delta=\epsilon=0$ B_5היא קבוצה בת"ל

תרגיל 2. קבע האם הווקטורים שייכים למרחב הנפרש, ואם כן ציינו מהו הצירוף הלינארי הדרוש כדי לקבל אותם.

1. האם הווקטור $v_1=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ שייך למרחב הנפרש על ידי $B_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$?

פתרון. כן,

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

וקטור ה-0 שייך לכל מרחב נפרש היות והצירוף הטריוואלי נותן אותו.

2. האם הווקטור $v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ שייך למרחב הנפרש על ידי $B_2=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$?

פתרון. אנחנו מחפשים α,β , כך ש-

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$$

כלומר זה שקול לפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\1&2&1\\1&1&2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{array}\right)$$

קבלנו שאין פתרון! לכן לא קיים צירוף לינארי של אברי B_2שיתן את v_2ולכן $v_2\notin Span\left(B_2\right)$

3. האם הווקטור $v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ שייך למרחב הנפרש על ידי $B_3=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$?

פתרון. אנחנו מחפשים α,β , כך ש-

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

כלומר זה שקול לפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&-1\\0&2&1\\1&1&-1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&1&-1\\0&2&1\\0&0&0\end{array}\right)$$

קבלנו שהפתרון הוא $\alpha=-\frac{3}{2},\beta=\frac{1}{2}$ לכן $v_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}=-\frac{3}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+$
$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\in Span\left(B_3\right)$

תרגיל 3. הוכח

1. יהי $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ קבוצה בת"ל אז הקבוצה $L_1=\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$ בת"ל כאשר $w_i=v_1+v_i$

פתרון. יהיו $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, כך ש-

$$\alpha_1w_1+\alpha_2w_2+\ldots+\alpha_nw_n=0$$

לכן

$$\alpha_1\left(v_1+v_1\right)+\alpha_2\left(v_1+v_2\right)\ldots+\alpha_n\left(v_1+v_n\right)=0$$
$$\Downarrow$$
$$\left(2\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n\right)v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3\ldots+\alpha_nv_n=0$$

ידוע ש- $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ לכן הצ"ל חייב להיות 0 כלומר

$$\begin{cases}2\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n&=&0\\\alpha_2&=&0\\\alpha_3&=&0\\\\\alpha_n&=&0\end{cases}$$

ומכאן

$$\begin{cases}\alpha_1&=&0\\\alpha_2&=&0\\\alpha_3&=&0\\\vdots&\vdots&\vdots\\\alpha_n&=&0\end{cases}$$

כלומר בצ"ל היחידי שמאפס את $L_1=\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$ הוא הצ"ל הטריוואלי ולכן היא בת"ל

2. יהי $S=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ קבוצה בת"ל אז הקבוצה $L_2=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ בת"ל כאשר $u_i=v_1+v_2+\ldots+v_i$

פתרון. יהיו $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$, כך ש-

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n = 0$$

לכן

$$\alpha_1 (v_1) + \alpha_2 (v_1 + v_2) \ldots + \alpha_n (v_1 + v_2 + \ldots + v_n) = 0$$
$$\Downarrow$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) v_1 + (\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n) v_2 + (\alpha_3 + \ldots + \alpha_n) v_3 \ldots + \alpha_n v_n = 0$$

ידוע ש- $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ לכן הצ"ל חייב להיות 0 כלומר

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n & = & 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_n & = & 0 \\ \alpha_3 + \ldots + \alpha_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & = & 0 \end{cases}$$

ומכאן

$$\begin{cases} \alpha_1 & = & 0 \\ \alpha_2 & = & 0 \\ \alpha_3 & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & = & 0 \end{cases}$$

כלומר בצ"ל היחידי שמאפס את $L_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ הוא הצ"ל הטריוואלי ולכן היא בת"ל

תרגיל 4.

1. האם הווקטור $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ שייך למרחב הנפרש על ידי

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

, ואם כן מצא את הצירוף הלינארי המתאים לו.

פתרון. אנחנו מחפשים α, β, γ , כך ש-

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כלומר זה שקול לפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{array}\right)$$

לכן $\alpha = \frac{1}{4}, \beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{4}$ לכן בסה"כ

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. מהסעיף הקודם הסק את הפתרון למערכת

$$\begin{cases} x+y+2z &= 1 \\ x+2y+z &= 1 \\ 2x+y+z &= 1 \end{cases}$$

פתרון. כעת אנחנו מחפשים x, y, z כך ש-

$$x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

זאת אותה מערכת משוואות! ולכן בפתרון שלה זהה $x=y=z=\frac{1}{4}$

בהצלחה!!