תרגיל 10

8 בינואר 2013

1. יהא V מרחב מכפלה פנימית של מטריצות מגודל $n \times n$ מעל $\mathbb{C}$ יחד עם המכפלה הפנימית $\langle A, B\rangle = tr\left(AB^*\right)$. תהא P מטריצה הפיכה קבועה, נגדיר העתקה לינארית $T_P : V \mapsto V$ על ידי $T_P(A) = P^{-1}AP$. מצא את T_P^*.

2. יהי V ממ"פ כמו בשאלה הקודמת. עבור $M \in V$ נגדיר $T_M(A) = MA$. הוכח ש T_M העתקה אוניטרית אם ורק אם M היא מטריצה אוניטרית.

3. יהי V מרחב מכפלה פנימית, T אופרטור לינארי על V. הוכח שאם לכל $v \in V$ מתקיים $\langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}$ אזי T צמודה לעצמה.

4. יהא $V = \mathbb{C}$ מרחב וקטורי מעל המספרים הממשיים.

   (א) הראה ש $\langle z, w\rangle = Re\left(z\overline{w}\right)$ מגדיר מכפלה פנימית על V.

   (ב) מצא העתקה לינארית משמרת נורמה מ V ל $\mathbb{R}^2$ יחד עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

   (ג) לכל $z \in V$ נגדיר $M_z\left(w\right) = zw$. הראה $\left(M_z\right)^* = M_{\overline{z}}$.

   (ד) עבור אילו מספרים מרוכבים M_z צמודה לעצמה?

   (ה) עבור אילו מספרים מרוכבים M_z אוניטרית?

5. יהי V ממ"פ ממימד סופי. יהא W תת־מרחב של V. נזכיר ש $V = W \oplus W^\perp$, כלמר כל וקטור ב V ניתן להציג באופן יחיד על ידי $v = w + w'$, כאשר $w \in W,\ w' \in W^\perp$. נגדיר $T_W(v) = w - w'$.

   (א) הוכח ש T_W אוניטרית וצמודה לעצמה.

   (ב) הוכח שכל אופרטור על V שצמוד לעצמו ואוניטרי הוא מהצורה T_W עבור ת"מ $W \subseteq V$.