תזכורת: יהי X מרחב טופולוגי. תת מרחב $A \subseteq X$ נקרא "קומפקטי" אם לכל כיסוי פתוח שלו יש תת כיסוי סופי. כלומר, אם יש אוסף כלשהו של קבוצות פתוחות O_i כך ש$A \subseteq \bigcup O_i$, אז יש מספר סופי של קבוצות מתוך האוסף, $O_{i_1},..,O_{i_n}$ כך ש $A \subseteq O_{i_1} \cup \cdots \cup O_{i_n}$.

בשיעור הקודם ראינו שבכל מרחב X, אם $x_n \to x$, אז $A = \{x_n\} \cup \{x\}$ קומפקטית.

הערה: אם X היא קבוצה סופית, אז לכל טופולוגיה על X, X תהיה קומפקטית. (כי כל איבר בX מספיק לקחת קבוצה אחת שמכילה אותו)

תרגיל: האם מרחב X עם הטופולוגיה הקוסופית עליו, הוא קומפקטי?

פתרון: זה נכון.

נניח ש$X \subseteq \bigcup O_i$. כל אחת מהן פתוחה. ברור שלא כולן ריקות. נבחר אחת מהן O_j באופן שרירותי. אז O_j^c סופי. כלומר $X \setminus O_j = \{x_1, ..., x_n\}$. לכל x_i יש איזשהו O_i שהוא שייך אליו. אז בסה"כ $O_j, O_1, ..., O_n$ המווה תת כיסוי סופי.

תרגיל: האם מרחב X עם הטופולוגיה הקומנייתית עליו, הוא קומפקטי?

פתרון: לא קומפקטי.

נקח $X = \mathbb{R}$.

נגדיר $O_n = \{n, n+1, n+2...\}^c$ כולן פתוחות כי המשלים בן מניה.

$$\mathbb{R} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$$

אין לו תת כיסוי סופי. כי אם נקח איחוד של מספר סופי של קבוצות, אז יש m מקסימלי שמשתתף בקבוצות האינדקסים. כלומר, O_m היא הקבוצה הכי גדולה באיחוד. ולכן כל המספרים שגדולים מm לא יהיו באיחוד.

משפט: יהי X מרחב קומפקטי. הוכיחו שכל תת קבוצה סגורה של X היא קומפקטי.

תרגיל: הוכיחו: (X, τ) קומפקטי אמ"מ לכל כיסוי פתוח שלו עם קבוצות פתוחות בסיסיות קיים תת כיסוי סופי.

פתרון: $\Leftarrow$ טריויאלי.

$\Longrightarrow$ נניח ש$X \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$ כיסוי פתוח. כל קבוצה פתוחה היא איחוד של בסיסיות.

$$O_i = \bigcup_{j \in J} U_{i,j}$$

כאשר $U_{i,j}$ קבוצות פתוחות בסיסיות.

אז $X \subseteq \bigcup_{i \in I, j \in J} U_{i,j}$. קיבלנו כיסוי של X שמורכב מקבוצות בסיסיות. לפי ההנחה יש לו תת כיסוי סופי.

$$U_{i,j,1} ..., U_{i,j,n}$$

תת כיסוי סופי.

לכל $U_{i,j,k}$ יש איזשהי קבוצה $O_{i,k}$ שמכילה אותו. אז $O_{i,1}, ..., O_{i,n}$ מהווה תת כיסוי סופי.

תרגיל: האם חיתוך סופי של תת קבוצות קומפקטיות הוא קומפקטי? כלומר אם X מרחב טופולוגי וA, B תתי קבוצות קומפקטיות של X, האם $A \cap B$ קומפקטית?

פתרון: נגדיר את המרחב הטופולוגי הבא:

$$X = \{-\infty\} \cup \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$$

$$\tau = \{O_n = \{-n, ..., n\}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z} \cup \{\infty\}, \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, X, \emptyset\}$$

$A = \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, B = \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$. הן קומפקטיות כי:

נראה שA קומפקטית. הוכחה על B דומה.

אם $\{O_i\}$ הוא כיסוי פתוח של A, אז $-\infty$ שייך לאחת מהקבוצות. אבל כל קבוצה פתוחה שמכילה את $-\infty$ מכילה כבר את כל A. אז קיבלנו תת כיסוי סופי שמורכב מקבוצה אחת בלבד.

$A \cap B = \mathbb{Z}$. לא קומפקטי, כי $\mathbb{Z} = \bigcup O_n$. וברור שאין לו תת כיסוי סופי.

תזכורת מההרצאה:

1. במרחב קומפקטי כל תת קבוצה סגורה היא קומפקטית.
2. במרחב האוסדורף כל תת קבוצה קומפקטית היא סגורה.

תרגיל: הוכיחו שאם X הוא מרחב האוסדורף, אז חיתוך כלשהו של קבוצות קומפקטיות הוא קומפקטי.

פתרון: יהיו A_i קבוצות קומפקטיות. מכיוון שהמרחב האוסדורף, כל הקבוצות הנ"ל סגורות. חיתוך כלשהו של קבוצות סגורות הוא קבוצה סגורה, לכן $\bigcap A_i$ היא קבוצה סגורה. נבחר j מסויים. $\bigcap A_i \subseteq A_j$. קבילנו שהחיתוך הוא תת קבוצה סגורה במרחב קומפקטי, לכן לפי משפט 1 מהתזכורת, החיתוך קומפקטי.

משפט: X קומפקטי אמ"מ לכל אוסף של תת קבוצות סגורות $\{S_i\}_{i\in I}$ כך ש $\bigcap_{i\in I} S_i = \emptyset$, קיימת תת קבוצה סופית $J \subseteq I$ כך ש $\bigcap_{i\in J} S_i = \emptyset$. (זה פשוט לעשת דה מורגן על התנאי עם הקבוצות הפתוחות)

תרגיל: הוכיחו: אם X הוא מרחב T_2 ו $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$סדרה יורדת של תת קבוצות קומפקטיות לא ריקות (כלומר, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$) אזי $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

פתרון: בגלל שהמרחב הוא האוסדורף הקבוצות סגורות. נשים לב שA_1 קומפקטית וכל הקבוצות מוכלות בA_1. אם $\bigcap A_n = \emptyset$, אז מהתנאי השקול לקומפקטיות, יש מספר סופי של קבוצות שהחיתוך שלהן ריק. אבל חיתוך של מספר סופי שווה פשוט לקבוצה האחרונה בחיתוך. אבל נתון שאף אחת מהקבוצות לא ריקה, אז קיבלנו שכל חיתוך סופי הוא לא ריק - סתירה.

הערה: סדרה יורדת של תתי קבוצות יכולה לתת חיתוך ריק. למשל $A_n = \{n, n+1, n+1, ...\}$

משפט: אם X קומפקטי ו$f : X \to Y$ פונקציה רציפה, אז $f[X]$ קומפקטית.

הגדרה: פונקציה $f : X \to Y$ נקראת "סגורה" אם לכל A סגורה בX $f[A]$ סגורה בY.

הגדרה: פונקציה $f : X \to Y$ נקראת "פתוחה" אם לכל A פתוחה בX $f[A]$ סגורה בY.

תרגיל: כל פונקציה רציפה ממרחב קומפקטי למרחב האוסדורף היא פונקציה סגורה.

פתרון: יהי X מרחב קומפקטי, וY מרחב האוסדורף, ו$f : X \to Y$ פונקציה רציפה. תהי $A \subseteq X$ תת קבוצה סגורה. ראיתם בהרצאה שבמרחב קומפקטי כל תת קבוצה סגורה היא קומפקטית, לכן A קומפקטית. שוב, לפי ההרצאה, תמונה רציפה של קומפקטי היא קומפקטית, לכן $f[A]$ היא תת קבוצה קומפקטית של Y. ופעם אחרונה לפי ההרצאה- כל תת קבוצה קומפקטית של מרחב האוסדורף היא סגורה.

הערה: פונקציה הפיכה רציפה וסגורה היא הומיאומורפיזם. (כנ"ל לגבי פונקציה רציפה הפיכה ופתוחה)

מסקנה: כל פונקציה רציפה והפיכה ממרחב קומפקטי למרחב האוסדורף היא הומיאומורפיזם.

תרגיל: יהא (X, τ) מרחב קומפקטי והאוסדורף. הוכיחו שאם $\tau \subsetneqq \tau'$ טופולוגיה על X, אזי (X, τ') לא קומפקטי ואם $\tau' \subsetneqq \tau$ טופולוגיה על X, אזי (X, τ') לא האוסדורף.

פתרון:

טענה ראשונה:

נניח בשלילה ש(X, τ') קומפקטי. $id : (X, \tau') \to (X, \tau)$ היא רציפה באופן טריוויאלי (כי המקור של קבוצה פתוחה זה היא בעצמה, והיא פתוחה בטופולוגיה היותר גדולה). ברור שפונקציית הזהות הפיכה. פונקציה רציפה והפיכה ממרחב קומפקטי למרחב האוסדורף היא הומיאומורפיזם. לכן $\tau = \tau'$. סתירה להנחה.

טענה שניה: נניח בשלילה ש(X,τ') הוא האוסדורף.

$$id:(X,\tau)\to(X,\tau')$$

רציפה. כמובן הפיכה. והיא הולכת מקומפקטי להאוסדורף. לכן הומיאומורפיזם. לכן $\tau=\tau'$, סתירה.

תזכורת: ב$\mathbb{R}^n$ קבוצות קומפקטיות הן בדיוק הקבוצות הסגורות והחסומות.

תרגיל: יהי X מרחב קומפקטי ו$f:X\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אז ל$f[X]$ יש איבר מקסימלי ומינימלי.

הוכחה: תמונה של קומפקטי היא קופמקטית. אז $f[X]$ היא תת קבוצה קומפקטית של $\mathbb{R}$, לכן סגורה וחסומה, לכן יש בה איבר מינימלי ומקסימלי. (מאינפי 1)

תרגיל: יהא X מרחב מטרי, $A\subseteq X$ תת קבוצה קומפקטית ו $x\in X\backslash A$. אזי קיימת $a\in A$ כך ש $d(x,A)=d(x,a)$.

פתרון: $d(x,A)=\inf_{b\in A}\{d(x,b)\}$.

נגדיר פונקציה $f:A\to\mathbb{R}$ ע"י

$$f(b)=d(x,b)$$

הוכחתם בש"ב שזאת פונקציה רציפה.

הפונקציה הולכת ממרחב קומפקטי ל$\mathbb{R}$ ולכן לתמונה שלה יש איבר מינימלי. שלומר, יש $a\in A$ כך ש$f(a)=d(a,x)$ הוא מינימלי. לכן $d(x,A)=\inf_{b\in A}\{d(x,b)\}=\min_{b\in A}\{d(x,b)\}=d(a,x)$

תזכורת: מכפלה סופית של מרחבים קומפקטיים היא מרחב קומפקטי.

תרגיל: במרחב מטרי נגדיר $d(A,B)=\inf_{a\in A,b\in B}\{d(a,b)\}$. הוכיחו שאם A,B קבוצות קומפקטיות אז יש $x\in A,y\in B$ כך ש

$$d(A,B)=d(x,y)$$

הוכחה: נסתכל כל הפונקציה

$$f:A\times B\to\mathbb{R}$$

$$f(a,b)=d(a,b)$$

בש"ב על מרחבי מכפלה הראתם שהפונקציה רציפה.

A,B קומפקטיות, לכן $A\times B$ קומפקטית. פונקציה רציפה מקומפקטי לממשיים- יש לה איבר מינימלי. כלומר, יש זוג $(x,y)\in A\times B$ כך ש

$$d(x,y)=\min_{(a,b)\in A\times B}\{d(a,b)\}$$