**האינטגרל המסוים**

**מוטיבציה**



עבור פונקציות "יפות מספיק", סכום שטחיי המלבנים "קרוב" לשטח שבין הגרף לציר ה - .

**הגדרה**

חלוקה של קטע סגור היא קבוצה סופית עבור כלשהו כך ש:

חלוקה של קטע סגור מחלקת אותו לתת קטעים סגורים (ניתן להציגו כאיחוד של קטעים סגורים).

**הגדרה**חלוקה מנוקדת של קטע סגור היא חלוקה , יחד עם בחירה של נקודה לכל .

נסמן = אורך הקטע ה – בחלוקה.

**הגדרה**תהי פונקציה מוגדרת בקטע סגור .

1. עבור חלוקה מנוקדת , נגדיר את סכום רימן המתאים ל - :
2. הנורמה של החלוקה מוגדרת:
האורך המקסימלי של קטע בחלוקה (נקרא גם הפרמטר של )
3. (לא פורמלי: )
פירושו: לכל קיים כך שלכל חלוקה מנוקדת עם מתקיים . בלשון הסדרות: לכל סדרת חלוקות מנוקדות כך ש -
מתקיים .
כאשר הגבול הנ"ל קיים, נאמר ש -
ונקרא ל – האינטגרל המסוים של בקטע .

(**תרגיל**: הוכח את שקילות שתי ההגדרות בסעיף 3 כלומר לפי ולפי סדרות)

1. כאשר קיים, אומרים שהפונקציה אינטגרבילית לפי רימן בקטע .

**דוגמה**
 תהי חלוקה מנוקדת.
זה נכון לכל חלוקה מנוקדת ולכן גם הגבול

**דוגמה**
הפונקציה של דיריכלה:
אינה אינטגרבילית באף קטע :
לכל , נחלק את לקטעים .
: החלוקה הנ"ל, עם נקודות אי רציונליות .

: החלוקה הנ"ל, עם נקודות רציונאליות .

לכן הגבול לא קיים.
**דוגמה**
פונקציה לא רציפה אך אינטגרבילית:
 בקטע :
**תיקון גלובלי:**
בחלוקה מנוקדת, היחס בין הנקודות הוא
ובנוסף .
נקבע . תהי חלוקה מנוקדת כרגיל, כך ש – . יהיו כך ש – . נשים לב: .

עבור קטן מספיק,
מהאי"ש הראשון והשלישי, על ידי חיבור אי"ש
פורמלית, בהינתן ניקח אז לכל חלוקה מנוקדת עם הניתוח לעיל תקף ולכן . לכן .

 **למה**
אם פונקציה אינטגרבילית בקטע אז חסומה בקטע. (ההפך איננו נכון – לדוגמה פונקציית דיריכלה חסומה אך אינה אינטגרבילית).

**הוכחה**
תהי לא חסומה ב - . נוכיח שהגבול אינו קיים.
(קיים = קיים במובן הצר)
יהי
ניקח . יהי נתון . נמצא חלוקה מנוקדת כך ש - .
למעשה, אפשר להסתדר עם כל חלוקה כך ש - :
תהי . אינה חסומה בקטע לכן יש כך ש – אינה חסומה ב - (מדוע?) ניקח כך ש - .
פורמלית: נבחר נקודה שרירותית עבור .
נבחר כך ש -
מאי"ש המשולש מתקיים (תרגיל!) גדול מ1 וסיימנו.