מתרגל מיכאל טויטו - dexlessdk@gmail.com

שעות קבלה יום ה' 14:00-15:00

מד"ר - תרגול 1

1 הפרדת משתנים

מד"ר מהצורה $\frac{dy}{dx} = f(x)\, g(y)$ (f ו-g רציפות) ניתן לפתור בעזרת הפרדת משתנים:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\, dx$$

מוציאים אינטגרל:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx + c$$

ואם אפשר, רצוי לחלץ את y

תרגילים

1. מצא את הפתרון הכללי של המד"ר $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^2+1}$

$$\left(y^2+1\right) dy = xdx$$

$$\int \left(y^2+1\right) dy = \int xdx + C$$

$$\boxed{2y^3 + 6y = 3x^2 + C}$$

2. מצא את הפתרון הכללי של $e^y \cdot \frac{dy}{dx} = 2x$

$$e^y dy = 2xdx$$

$$\int e^y dy = \int 2xdx + C$$

$$e^y = x^2 + C$$

$$\boxed{y = \ln\left(x^2 + C\right)}$$

<u>הערה:</u> אחד היתרונות בקורס הזה, הוא שניתן לדעת האם הפתרון שהתקבל נכון ע"י גזירה והצבה במד"ר. נוודא את נכונות התשובה $y = \ln\left(x^2 + C\right)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2 + c}$$

$$e^y \frac{dy}{dx} = e^{\ln\left(x^2+C\right)} \frac{2x}{x^2 + C} = \left(x^2 + C\right) \frac{2x}{\left(x^2 + C\right)} = 2x\surd$$

3. פתור את המד"ר $xe^{x^2} + y \cdot y' = 0$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = -xe^{x^2}$$

$$\int y dy = -\int xe^{x^2} dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\int xe^{x^2} dx + C$$

נציב $u = x^3$, $du = 2xdx$, $\frac{du}{2} = xdx$

$$\frac{y^2}{2} = -\int e^u \frac{du}{2} = -\frac{1}{2}\int e^u du = -\frac{1}{2}e^u + C$$

$$\boxed{\frac{y^2}{2} = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C}$$

$$\boxed{y^2 = -e^{x^2} + C}$$

$$y = \pm\sqrt{-e^{x^2} + C}$$

נציב את תנאי ההתחלה $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

$$1 = 1^2 = -e^0 + C = -1 + C$$

$$C = 2$$

לסיכום:

$$y^2 = -e^{x^2} + 2$$

4. פתור את המשוואה $\frac{dx}{dy} = K(10-x)$ כאשר $x < 10$ ו-K פרמטר ממשי כלשהו

$$\frac{dx}{10-x} = Kdt$$

$$\int \frac{dx}{10-x} = \int Kdt$$

$$\frac{\ln|10-x|}{-1} = Kt + C$$

$$\ln \overbrace{(10-x)}^{x<10} = -Kt - C$$

$$10 - x = e^{-Kt+C} = e^{-Kt}e^{C}$$

$$\boxed{x = 10 - Ce^{-kT}}$$

5. קבע אילו מהמשוואות הבאות ניתנות להפרדת משתנים ופתור את אלו שכן

א. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y+3}$

ב. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{x}$

ג. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + 1$

ד. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x+y}$

ה. $\frac{dy}{dx} = x - y$

ו. $x\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$

פתרון: ניתן להפריד משתנים במשוואות הבאות בלבד: א', ב', ג', ו'. נפתור אותן:

א.

$$\int (y+3)\,dy = \int xdx$$

$$\frac{y^2}{2} + 3y = \frac{x^2}{2} + C$$

$$\boxed{y^2 + 6y = x^2 + K}$$

ב.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$$

$$\int dy = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx$$

$$\boxed{y = x + \ln|x| + C}$$

ג. ראה ב'

ו.

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$$

$$\int ydy = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{y^2}{2} = \ln|x| + C$$

$$y^2 = 2\ln|x| + K$$

$$\boxed{y^2 = \ln|x|^2 + K = \ln x^2 + K}$$

6. שאלה ממבחן - מועד א' תשע"א

אם a, b הם קבועים, מצא תנאי על a ו/או b כך שקיים פתרון למשוואה $y'(t) + ay(t) = tb$ מהצורה $y(t) = c_1t + c_2$ עם c_1, c_2 קבועים.

פתרון:

נגזור: $y'(t) = c_1$ ונציב במד"ר:

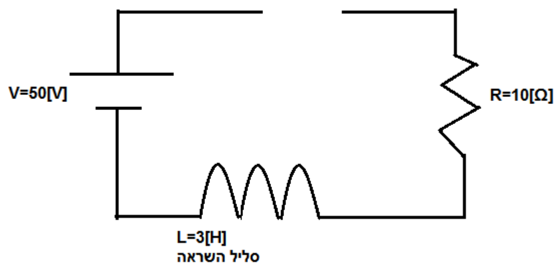
$$c_1 + a(c_1t + c_2) = tb$$

$$c_1 + ac_1t + ac_2 = tb$$

$$ac_1t + (c_1 + ac_2)t^0 = bt + 0t^0$$

$$\boxed{\begin{cases} ac_1 = b \\ c_1 + ac_2 = 0 \end{cases}}$$

.7 **נתון מעגל חשמלי כמתואר בציור. לפי חוק קירכוהף, הזרם במעגל מקיים את**



המשוואה הדיפרנציאלית: $Ri+L\dfrac{di}{dt}=V$

א. בהינתן שבזמן $t=0$ המעגל פתוח מצא את הזרם החשמלי במעגל בזמן t כלשהו.

ב. מהו הזרם החשמלי במעגל לאחר זמן רב $\lim\limits_{t\to\infty} i\left(t\right)$?

פתרון

א. כשהמעגל פתוח, לא זורם בו זרם. משמע יש לנו תנאי התחלה $i\left(0\right)=0$.

$$10i=3\frac{di}{dt}=50$$

$$3\frac{di}{dt}=50-10i$$

$$\int\frac{di}{50-10i}=\int\frac{dt}{3}$$

$$\frac{\ln\left|50-10i\right|}{-10}=\frac{t}{3}+C$$

$$\ln\left|50-10i\right|=\frac{-10}{3}t-10C+A$$

המד"ר הוא לאחר הפעלת ה $\exp\left(.\right)$

$$\left|50-10i\right|=e^{\frac{-10}{3}t+A}=e^{A}e^{\frac{-10}{3}t}$$

$$50-10i=\pm e^{A}e^{\frac{-10}{3}t}$$

$|x|=5$
x=±5

$$10i=50-Ce^{\frac{-10}{3}t}$$

$$i=5-Ke^{\frac{-10}{3}t}$$

נשתמש בתנאי ההתחלה:

$$0 = i(0) = 5 - Ke^0 = 5 - K$$

$$\boxed{K = 5}$$

הזרם הוא

$$i(t) = 5\left(1 - e^{\frac{-10}{3}t}\right)$$

ב.

$$\lim_{t\to\infty} i(t) = 5(1-10) = 5\,[A]$$

2 משוואות ליניאריות מסדר ראשון

מד"ר מהצורה $\frac{dy}{dx}+P(x)\,y = Q(x)$ נקראת מד"ר לינארית מסדר ראשון <u>בצורה סטנדרטית</u>.

אם המד"ר מהצורה $a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)\,y = c(x)$ נחלק ב$a(x)$ ונגיע לצורה הסטנדרטית $\frac{dy}{dx} + \underbrace{\frac{b(x)}{a(x)}}_{P(x)}y = \underbrace{\frac{c(x)}{a(x)}}_{Q(x)}$. אם $Q(x) = 0$ המד"ר נקראת בנוסף גם הומוגנית.

פתרון מד"ר לינארית הומוגנית מסדר ראשון

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -P(x)\,y$$

$$\frac{dy}{y} = -P(x)\,dx$$

$$\ln|y| = \int -P(x)\,dx + c$$

$$|y| = e^c e^{-\int P(x)dx}$$

$$y = \pm e^c e^{-\int P(x)dx} \Rightarrow y = Ae^{-\int P(x)dx} = Ke^{-\int P(x)dx}$$

במקרה הלא הומוגני(שבו $Q(x) \not\equiv 0$) נשתמש בשיטת וריאציית המקדמים שבה מתייחסים לקבוע (K או C) כפונקציה ($K(x)$, $C(x)$). ליתר דיוק התהליך הינו כנ"ל, בהינתן מד"ר $y' + P(x)\,y = Q(x)$:

I. פותרים את המד"ר ההומוגנית המתאימה: $y'+P(x)y=0$. הפתרון המתקבל הוא $y_h = ce^{-\int P(x)dx}$[1]

II. מחפשים פתרון פרטי(בלי קבועים) למד"ר המקורית, בעזרת התייחסות לקבוע c כאל פונקציה $c(x)$

$$y_p = c(x)e^{-\int P(x)dx}$$

$$y_p' = c'(x)e^{-\int P(x)dx} + c(x)e^{-\int P(x)dx}(-P(x))$$

נציב במד"ר

$$y_p' + P(x)y_p = Q(x)$$

$$c'(x)e^{-\int P(x)dx} - P(x)c(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)c(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$c'(x) = Q(x)e^{+\int P(x)dx}$$

$$c(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

$$\Rightarrow y_p = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx e^{-\int P(x)dx} = \frac{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx}{e^{\int P(x)dx}}$$

III. לסיכום, הפתרון הכללי הוא $\boxed{y = y_h + y_p = \frac{\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx}{e^{\int P(x)dx}}}$

תרגילים

1. מצא את הפתרון הכללי של $xy' - 2y = x^2$

פתרון

נעביר לצורה הסטנדרטית: $y' - \frac{2}{x}y = x$. נפתור את המשוואה ההומוגנית המתאימה:

$$y' - \frac{2}{x}y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{2y}{x}$$

$$\ln|y| - \ln|x^2| = c$$

[1] y_h הוא החלק ההומוגני

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x}$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + c = \ln\left|x^2 + c\right|$$

$$\ln|y| - \ln\left|x^2\right| = c$$

$$y_h = Kx^2 \frac{y}{x^2} = \pm e^c \ln\frac{|y|}{|x^2|} = c$$

נשתמש בוריאציית המקדמים:

$$\begin{cases} y_p = K(x)\,x^2 \\ y_p' = K'(x)\,x^2 + K(x)\,2x \end{cases}$$

$$y_p' - \frac{2}{x}y_p = x$$

$$K'(x)\,x^2 + K(x)\,2x - \frac{2}{x}K(x)\,x^2 = x$$

$$K'(x) = \frac{1}{x}$$

$$K(x) = \ln|x| \Rightarrow y_p = \ln|x|\,x^2$$

הפתרון הוא

$$y = y_h + y_p = \boxed{Kx^2 + \ln|x|\,x^2}$$