מקליד: עידן אריה
מרצה: פרופ' שרית קראוס
תאריך: 2016-03-10

נושאים מתקדמים בבינה מלאכותית
89-950-01

חשיבה במשפטים לוגים

הרעיון - לתרגם משפטים לביטויים בלוגיקה(מסדר ראשון):

- "מישהו שמע על משהו" - $\exists_{x,y}\text{heard}\left(x,y\right)$
- "כולם שמעו על הכל" - $\forall_{x,y}\text{heard}\left(x,y\right)$
- "מישהו לא שמע על הכל" - $\exists_{x}\exists_{y}\neg\text{heard}\left(x,y\right)$, או לחילופין - $\exists_{x}\neg\forall_{y}\text{heard}\left(x,y\right)$
- "אסור נעליים מסריחות" - $\forall_{x}\text{shoe}\left(x\right)\wedge\text{stinky}\left(x\right)\implies\neg\text{allowed}\left(x\right)$ או $\neg\exists_{x}\text{shoe}\left(x\right)\wedge\text{stinky}\left(x\right)\wedge\text{allowed}\left(x\right)$
  - אבל **לא** $\neg\exists_{x}\text{shoe}\left(x\right)\wedge\text{stinky}\left(x\right)\implies\text{allowed}\left(x\right)$. הביטוי $\text{shoe}\left(x\right)\wedge\text{stinky}\left(x\right)\implies\text{allowed}\left(x\right)$ מתקיים אם x לא נעל או x לא מסריח, ולכן מספיק שיהיה x אחד שאינו נעל או אינו מסריח כדי שכל הביטוי יהיה שקר.

    אפשר לראות את זה אם מפתחים את הביטוי לפי הכלל $\forall_{x}\neg p\left(x\right)\iff\neg\exists_{x}p\left(x\right)$:

$$\forall_{x}\neg\left(\text{shoe}\left(x\right)\wedge\text{stinky}\left(x\right)\rightarrow\text{allowed}\left(x\right)\right)$$

$$\forall_{x}\neg\left(\neg\left(\text{shoe}\left(x\right)\wedge\text{stinky}\left(x\right)\right)\right)\vee\text{allowed}\left(x\right)$$

$$\forall_{x}\left(\text{shoe}\left(x\right)\wedge\text{stinky}\left(x\right)\wedge\neg\text{allowed}\left(x\right)\right)$$

    כלומר כל הxים בעולם הם גם נעליים, גם מסריחים וגם אסורים.

- "כל מתחיל טוב יכול להביס מקצוען כלשהו" - $\forall_{x}\left[\left\{\text{amateur}\left(x\right)\wedge\text{good}\left(x\right)\right\}\implies\exists_{y}\left\{\text{professional}\left(y\right)\wedge\text{beat}\left(x,y\right)\right\}\right]$

לוגיקה מודלית(Modal Logic)

- כאשר אנחנו רוצים לדבר על סדר(מה היה לפני ומה אחרי)
- כאשר יש לנו מספר סוכנים - מה כל אחד יודע? במה כל אחד מאמין?

נניח שיש שני רובוטים שמבצעים משימה בשטח, והתקשורת ביניהם התנתקה לחמש דקות. לכל רובוט חשוב לדעת מה הרובוט השני יודע, ומה הרובוט השני חושב שהראשון יודע, ומה השני חושב שהראשון חושב שהשני יודע וכו'...

דוגמה: מפקדי שני צבאות צריכים לתאם התקפה. אחד שולח רץ לשני, אבל יש סיכוי שהאויב יתפוס אותו, ולכן המפקד הראשון לא יודע אם הוא הגיע ולא יודע אם לתקוף. המפקד השני יכול לשלוח רץ בחזרה, אבל גם הוא עשוי שלא להגיע, והמפקד השני לא יודע אם המפקד הראשון קיבל את הרץ ויתקוף או לא, וכן הלאה. אי אפשר להשיג 100% וודאות.

תחביר

- עדיין יש לנו את אותם סימנים מלוגיקה מסדר ראשון:
  - P_0, P_1 - עובדות
  - $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee$ - אופרטורים לוגיים
  - $(,)$ - סדרי קדימויות
  - $\perp$ - שקר
- $\mathscr{P}$ - הנוסחאות הבסיסיות
- נגדיר את הpropositional formulas ונסמן $\mathscr{F}$:
  - לכל $P \in \mathscr{P}$ מתקיים $P \in \mathscr{F}$
  - $\perp \in \mathscr{F}$
  - אם $\varphi \in \mathscr{F}$ אז גם $\neg \in \mathscr{F}$
  - אם $\varphi, \psi \in \mathscr{F}$ אז:

$$(\varphi \rightarrow \psi) \in \mathscr{F} \qquad (\varphi \vee \psi) \in \mathscr{F} \qquad (\varphi \wedge \psi) \in \mathscr{F}$$

איך נסמן ש"הרובוט יודע אם יורד גשם"?

- P - האם יורד גשם
- R_1 - רובוט
- k - knowledge

האם נוכל להגיד $k\left(R_1, P\right)$? זה בעיה, כי P זה דבר שיכול להשתנות...

לוגיקה מודלית

מגדירים כמתים חדשים: $\Box, \diamond$:

- $\Box P$ - תמיד P נכון
  - נשים לב שתמיד מתקיים $\Box P \to P$
  - $\Box$ זה modal כללי. כשיש הגדרה ספציפית זה משתנה - למשל כאשר יש knowledge נסמן kP במקום $\Box P$
- $\diamond P$ - לפעמים P נכון
  - $\diamond p \equiv \neg \Box \neg p$

נגדיר את סט הנוסחאות המודלית $\mathscr{F}_M$ כך: אם $\varphi \in \mathscr{F}$ אז:

$$\varphi \in \mathscr{F}_M \qquad \Box \varphi \in \mathscr{F}_M \qquad \diamond \varphi \in \mathscr{F}_M$$

מודלים בmodal logic

מודל בלוגיקה מודלית $\mathscr{M} = \langle W, R, V \rangle$ כך ש:

- W - היקום. כל עולם $w \in W$ הוא השמה של ערכי אמת לערכים. בכל עולם יש נוסחאות בסיסיות אחרות שהן נכונות.
  - w מסמן גם מה סוכן בעולם חושב. הסוכן לא יודע באיזה עולם הוא נמצא.
- R - יחס בין עולמות - accessibility relation. $w_1 R w_2$ אם סוכן שנמצא בw_1 מאמין שw_2 אפשרי.
  - R **לא** חייב להיות רפלקסיבי! יכול להיות שהסוכן לא מאמין שהעולם שהוא נמצא בו אפשרי...
- V - פונקציה $V : \mathscr{P} \to \mathcal{P}(W)$ שאומרת מה הנוסחאות האטומטיות שנכונות בעולם. כלומר אם $w \in V(P)$ אז לפי w P נכון.

נסמן:

- $\mathscr{M} \models_w P \iff w \in V(P) \iff$ המודל $\mathscr{M}$ מספק את P בw.
- שלילה: $\mathscr{M} \not\models_w P \iff \mathscr{M} \models_w \neg P$
- נקבע אם $\mathscr{M} \models_w \varphi$ כאשר $\varphi = \psi \wedge \theta, \varphi = \psi \vee \theta$ אם $\psi \to \theta$ על ידי התבוננות בטבלת אמת.
- $\mathscr{M} \models_w \Box\varphi$ אם ורק אם לכל $w' \in W$ המקיים wRw' מתקיים $\mathscr{M} \models_{w'} \varphi$. כלומר, כל עולם ש"נגיש" לw באמצעות R חושב שφ נכון.
  - כלומר תמיד P נכון לפי w אם בכל עולם אפשרי לפי w P נכון.