# פתרון תרגיל 2

**שאלה 1:** נחשב את הסדר של האיברים: $4+4+4=12\equiv 0$ ולכן $o(4)=3$ ולכן הוא לא יכול להיות יוצר.
לעומת זאת אפשר לחשב את כל הסכומים של 7 במודולו 12 ולראות ש $<7>=\mathbb{Z}_{12}$, ולכן 7 הוא יוצר.

**שאלה 2:** תהי $G$ חבורה, $a\in G$. הוכיחו: $o(a)=o(a^{-1})$.

נסמן $n=O(a)$ אזי $\left(a^{-1}\right)^n=\left(a^n\right)^{-1}=e^{-1}=e$ ולכן $o(a^{-1})\le n$.
נסמן $m=o(a^{-1})$ אזי $a^m=\left(\left(a^{-1}\right)^{-1}\right)^m=\left(\left(a^{-1}\right)^m\right)^{-1}=e^{-1}=e$ ולכן $o(a)=n\le m$.
קיבלנו $n\le m$ , $m\le n$ ולכן $n=m$.

**שאלה 3:**
תהי $G$ חבורה סופית. $a,b\in G$ הוכיחו כי $o(ab)=o(ba)$.
(הדרכה: חשבו את $(ab)^{o(ba)}$ ואת $(ba)^{o(ab)}$).

נסמן $n=o(ab)$ ו- $m=o(ba)$.
נחשב:
$(ba)^n=(ba)(ba)\cdots(ba)=b(ab)(ab)\cdots(ab)a=b(ab)^{n-1}a=b(ab)^{-1}a=bb^{-1}a^{-1}a=ee=e$
ולכן $m\le n$.
ומצד שני:
$(ab)^m=(ab)(ab)\cdots(ab)=a(ba)\cdots(ba)b=a(ba)^{m-1}b=a(ba)^{-1}b=aa^{-1}b^{-1}b=ee=e$
ולכן $n\le m$ . בסך הכל קיבלנו שיוויון $n=m$.

**שאלה 4:** תהא $G$ חבורה סופית. יהיו $a,b\in G$. הוכח/הפרך

(א) אם $a,b$ מתחלפים אז $o(ab)=o(a)\cdot o(b)$
פתרון: לא נכון. ניקח $a=b=2\in\mathbb{Z}_4$ אזי $o(ab)=o(0)=1$ אבל $o(a)o(b)=2\cdot 2$

(ב) $\langle a\rangle=\langle a^3\rangle$
פתרון: לא נכון. ניקח $a=1\in\mathbb{Z}_3$ אזי $o(3a)=o(0)=1$ אבל $o(1)=3$

(ג) אם $b=a^4$ אזי $\langle ab\rangle\subseteq\langle a\rangle$
פתרון: נכון. יהא $x\in\langle ab\rangle=\langle a^4\rangle$ אזי $x=\left(a^4\right)^n=a^{4n}$ עבור $n$ שלם כלשהו. אזי בפרט $x$ הוא חזקה של $a$ ולכן שייך ל $\langle a\rangle$

(ד) $\langle a\rangle=\langle a^{-1}\rangle$
פתרון: נכון. נראה הכלה בכיוון אחד (הכיוון השני דומה). יהא $x\in\langle a\rangle$ אזי $x=a^n$ עבור $n$ שלם כלשהוא. אזי $x=\left(a^{-1}\right)^{-n}$ ולכן הוא חזקה של $a^{-1}$ובפרט שייך לחבורה הנוצרת על ידו.

**שאלה 5:** פתרון : זיכרו שבשביל להראות כי $H \subseteq G$ תת חבורה צריך להראות ש

- איבר היחידה שייך ל $H$ כלומר $e \in H$
- לכל $h_1 h_2 \in H$ מתקיים כי $h_1 h_2^{-1} \in H$

(א) $H = \{a + ai \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C} = G$

פתרון : ת"ח כי $a+ai, b+bi \in H$ אזי $(a+ai)-(b+bi) = a-b+(a-b)i \in H$ בנוסף איבר היחידה $0 \in H$ (הוא מתקבל אם ניקח $a = 0$)

(ב) $H = m\mathbb{Z}_n = \{mz \mid z \in \mathbb{Z}_n\} \subseteq \mathbb{Z}_n = G$

פתרון : ת"ח כי $mz_1, mz_2 \in H$ אזי $mz_1 - mz_2 = m(z_1 - z_2) \in H$ בנוסף איבר היחידה $0 \in H$ (הוא מתקבל עבור $z = 0$)

(ג) $H = \{A \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid |A| \neq 0\} \subseteq \mathbb{F}^{n\times n} = G$

פתרון : לא ת"ח כי $I, -I \in H$ אבל $I - I = 0 \notin H$

(ד) תהא $G$ חבורה ו $n \in \mathbb{N}$. $H = \{g^n | g \in G\}$

פתרון : לא. למשל $G = S_3$ ו $n = 3$ אזי $H = \{id, (1,2), (2,3), (13)\}$ אינה ת"ח כי אין סגירות.

(ה) תהא $G$ חבורה חילופית ו $n \in \mathbb{Z}$. $H = \{g^n | g \in G\}$

פתרון : ת"ח כי $g_1^n, g_2^n \in H$ אזי $g_1^n \left(g_2^n\right)^{-1} = g_1^n \left(g_2^{-1}\right)^n = \left(g_1 g_2^{-1}\right)^n \in H$ כאשר המעבר האחרון נכון בגלל ש $H$ חילופית. בנוסף $e^n = e \in H$

(ו) $H = \{x^2 | x \in \mathbb{Z}_4\} \subseteq \mathbb{Z}_4$ פתרון : נחשב מפורש $0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 0, 3^2 = 1$ ולכן

$$H = \{0, 1\}$$

ולכן $H$ אינה תת חבורה כי $1 + 1 = 2 \notin H$ ואין סגירות לחיבור

(ז) $H = \{x^3 | x \in \mathbb{Z}_5\} \subseteq \mathbb{Z}_5$

פתרון : נחשב מפורש $0^3 = 0, 1^3 = 1, 2^3 = 3, 3^3 = 2, 4^3 = 4$ ולכן

$$H = \{0, 1, 3, 2, 4\}$$

כלומר $H$ שווה לכל $\mathbb{Z}_5$ ולכן תת חבורה.

(ח) $H = \left\{\frac{a}{b} \,|\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, \frac{b}{4} \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{Q}$

פתרון : זוהי תת חבורה כי $H$ אינה ריקה. בנוסף:

$$\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = \frac{b'a - ba'}{bb'}$$

עבור $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'} \in H$ נקבל ש 4 מחלק את $b, b'$ ובפרט את $bb'$ ולכן גם

$$\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'} = \frac{b'a - ba'}{bb'} \in H$$

**שאלה 6:** תהא $G$ עם $n > 2$ איברים. הוכח כי לא קיימת $H \leq G$ עם $n - 1$ איברים.

פתרון : נניח בשלילה כי קיימת $H \leq G$ עם $n - 1$ איברים. אזי קיים איבר יחיד $g \in G \backslash H$.

כיוון שב $H$ יש לפחות 2 איברים אזי קיים $e \neq h \in H$. בנוסף $gh \in H$ כי $gh \neq g$ (אם $gh = h$ אז $g = e$ ע"י הכפלת $h^{-1}$ משמאל). אבל $H$ת"ח ולכן קיים $h^{-1} \in H$ וגם מתקיים סגירות $g = (gh)\, h^{-1} \in H$. סתירה

**שאלה 7:** $\mathbb{Z}_6$ היא אבלית, ו $S_3$ לא.

**שאלה 8:** $\mathbb{Z}_4$ היא צקלית (נוצרת ע"י 1) ואילו $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ היא לא. (שכן כל האיברים שם הם מסדר לכל היותר 2. עשיתם משהו דומה בתרגיל הקודם).

**שאלה 9:** לפי הטענה האיבר $a^3$ הוא מסדר 4 ולכן התת"ח שהוא יוצר $\langle a^3 \rangle$ היא מסדר 4. (התת"ח היא בודאי ציקלית כי כל ת"ח של תיקלית היא בעצמה ציקלית).

**שאלה 10:** יהי $H \cap Z(G)$ $h \in$, נראה ש $h \in Z(H)$. לכל $x \in H$ מתקיים $x \in G$ (כי $H$ היא ת"ח) ולכן $hx = xh$. כלומר ש $h$מתחלף עם כל אברי $H$. בנוסף $h \in H$ ולכן $h \in Z(H)$ .

**שאלה 11:**

(א) $\phi(e_1) = e_2$ [רמז: חשב $\phi(e_1 e_1)$]

פתרון : מצד אחד $\phi(e_1 e_1) = \phi(e_1)$ ומצד שני

$$\phi(e_1 e_1) = \phi(e_1)\phi(e_1)$$

כיוון ש $\phi(e_2) \in G_2$ יש לו הופכי. לכן אם נכפיל את השיוון

$$\phi(e_1)\phi(e_1) = \phi(e_1)$$

בהופכי זה נקבל

$$\phi(e_1) = e_2$$

(ב) $\phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$לכל $g \in G_1$.

פתרון : נחשב

$$e_2 = \phi(e_1) = \phi(gg^{-1}) = \phi(g)\phi(g^{-1})$$

**שאלה 12:**

(א) מצא המומורפיזם לא טריוואלי מהחבורה החיבורית $\mathbb{Z}_3$ לחבורת התמורות $S_3$

פתרון : כיוון ש $\langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_3$ ציקלית ומתקיים $3 \cdot 1 = 0$ אזי מספיק להגדיר הומורפיזים ע"י קביעה לאן שולחים את 1. נניח $\sigma \mapsto 1$ אזי $\sigma$ צריכה לקיים $\sigma^3 = id$. לכן הומורפיזם אפשרי אחד הוא

$$\phi(1) = (1, 2, 3)$$

ואז,

$$\phi(2) = \phi(1 + 1) = \phi(1)\phi(1) = (1, 2, 3)^2 = (1, 3, 2)$$

וגם

$$\phi(0) = id$$

(ב) הוכח שההומומורפיזם הטריאלי הוא ההומומורפיזם היחיד מ $S_3$ ל $\mathbb{Z}_3$

פתרון : הוכחה: יהא הומו' $\phi$ אזי עבור $\sigma_1 = (1, 2), \sigma_2 = (2, 3)$ מתקיים:

$$0 = \phi(id) = \phi(\sigma_i^2) = 2\phi(\sigma_i)$$

אזי האיבר היחידה $a \in \mathbb{Z}_3$ המקיים $0 = 2a$ הוא $a = 0$ ולכן $\phi(\sigma_i) = 0$ ולכן

$$\phi((1, 2, 3)) = \phi(\sigma_1\sigma_2) = \phi(\sigma_1) + \phi(\sigma_2) = 0$$

כיוון ש $(1, 2, 3)$ ו $(1, 2)$ יוצרים של $S_3$ והם נשלחים לאפס אזי כל איבר ב $S_3$ ישלח ל־0 ולכן זהו ההומו' הטריאלי.

**שאלה 13:** (א) הוכח כי $Aut(G)$ חבורה ביחס לפעולת הרכבת פונקציות.

פתרון : הוכחה:

i. יהיו $\phi_1,\phi_2 \in Aut(G)$ אזי לכל $g,h \in G$ מתקיים כי

$$(\phi_1 \circ \phi_2)(gh) = \phi_1(\phi_2(gh)) = \phi_1(\phi_2(g)\phi_2(h)) = \phi_1(\phi_2(g))\phi_1(\phi_2(h)) = (\phi_1 \circ \phi_2)(g)(\phi_1 \circ \phi_2)(h)$$

ולכן

$$\phi_1 \circ \phi_2$$

הומו'. בנוסף הרכבה של פונקציות הפיכות היא פונקציה הפיכה $\phi_1 \circ \phi_2$ הומו' הפיך ולכן יש סגירות.

ii. קיבוציות יש בכל הרכבת פונקציות

iii. איבר היחידה הוא $id$ שגם הוא הומו'

iv. איבר הופכי : יהי $\phi \in Aut(G)$ אזי נראה כי הפונקציה ההופכית $\phi^{-1}$ היא גם הומו'. הוכחה

$$\left(\phi^{-1}\right)(gh) = \left(\phi^{-1}\right)(g)\left(\phi^{-1}\right)(h)$$

אמ"מ (ע"י הרכבה של $\phi$משני הצדדים)

$$gh = \phi\left[\left(\phi^{-1}\right)(g)\left(\phi^{-1}\right)(h)\right]$$

שאכן מתקיים כי

$$\phi\left[\left(\phi^{-1}\right)(g)\left(\phi^{-1}\right)(h)\right] = \phi\left[\left(\phi^{-1}\right)(g)\right]\phi\left[\left(\phi^{-1}\right)(h)\right] = gh$$

(ב) נגדיר הומורפיזם של חבורות

$$\Phi : G \to Aut(G)$$

ע"י $\Phi(x) = I_x$ כאשר $I_x$ מוגדר להיות פונקציה ההצמדה. כלומר $I_x(g) = xgx^{-1}$.

הוכיחו כי $\Phi$ הומורפיזם (אין צורך להוכיח כי $I_x \in Aut(G)$) ומצאו $ker(\Phi)$.

פתרון : הוכחה:

i. יהיו $x,y \in G$ אזי צריך להוכיח כי

$$\Phi(xy) = \Phi(x) \circ \Phi(y)$$

כלומר שמתקיים כי הפונקציות

$$I_{xy} = I_x \circ I_y$$

שוות. יהא $g \in G$ צריך להוכיח כי

$$I_{xy}(g) = (I_x \circ I_y)(g)$$

ואכן

ii. נמצא את הגרעין

$$Ker(\Phi) = \{x \in G : I_x = id\} = \left\{x \in G : \forall g \; xgx^{-1} = g\right\} = \{x \in G : \forall g \; xg = gx\} = Z(G)$$

כלומר זה המרכז $(Center)$ של החבורה.

**שאלה 14: א.** i. יהיו $x, y \in G = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ אזי צריך להוכיח כי

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

ואכן

$$\phi(xy) = \frac{xy}{|xy|} = \frac{xy}{|x||y|} = \frac{x}{|x|}\frac{y}{|y|} = \phi(x)\phi(y)$$

ii. נמצא את הגרעין

$$Ker\,(\phi) = \{x \in G:\ sign(x) = 1\} = \{x \in \mathbb{R}:\ x > 0\}$$

**ב.** פתרון : נשים לב ש $\phi(z) = |z|^2$ כאשר $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. נמשיך להוכחה:

i. יהיו $z_1, z_2 \in G = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ אזי צריך להוכיח כי

$$\phi(z_1z_2) = \phi(z_1)\phi(z_1)$$

ואכן

$$\phi(z_1z_2) = |z_1z_2| = |z_1||z_2| = \phi(z_1)\phi(z_2)$$

ii. נמצא את הגרעין

$$Ker\,(\phi) = \{z \in G:\ |z| = 1\} = \left\{e^{i\theta} |\ \theta \in \mathbb{R}\right\}$$

כלומר מעגל היחידה.