שיעורי בית 6

1. תהא G חבורה ו $H \trianglelefteq G$ תת חבורה נורמלית. הוכח/הפרך

(א) אם G ציקלית גם G/H ציקלית.
פתרון: יהא $g \in G$ יוצר אזי $gH \in G/H$ יוצר. הוכחה: יהא $g'H \in G/H$ לפי הגדרת g קיים n כך ש $g^n = g'$ ואז

$$(gH)^n = g^nH = g'H$$

(ב) אם G/H ציקלית גם G ציקלית.
פתרון: ניקח חבורה G שאינה חילופית (ולכן לא ציקלית). נגדיר $H = G$ תת חבורה נורמלית. אזי G/H עם איבר יחיד ולכן ציקלית אבל החבורה G אינה ציקלית.

2. נתון: $H_2 \trianglelefteq G_2$ וגם $H_1 \trianglelefteq G_1$. הוכח:

(א) $(H_1 \times H_2) \trianglelefteq (G_1 \times G_2)$
פתרון: יהא $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ ו $(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$. צריך להוכיח כי

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2)(g_1, g_2)^{-1} \in H_1 \times H_2$$

אכן, לפי הגדרת חבורת המכפלה $G_1 \times G_2$

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2)(g_1, g_2)^{-1} = (g_1, g_2)(h_1, h_2)\left(g_1^{-1}, g_2^{-1}\right) = \left(g_1h_1g_1^{-1}, g_2h_2g_2^{-1}\right)$$

כיוון ש H_1 נורמלית נקבל כי $g_1h_1g_1^{-1} \in H_1$ ובגלל ש H_2 נורמלית נקבל כי $g_2h_2g_2^{-1} \in H_2$ ולכן

$$\left(g_1h_1g_1^{-1}, g_2h_2g_2^{-1}\right) \in H_1 \times H_2$$

(ב) $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \cong (G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$
פתרון: נגדיר את הומורפיזם ההטלה

$$\phi : G_1 \times G_2 \to (G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$$

ע"י

$$(g_1, g_2) \mapsto (g_1H_1, g_2H_2)$$

זהו הומו' על (בדקו!) נרצה להשתמש במשפט האיזו' הראשון. קודם נחשב את הגרעין של ϕ

$$\begin{aligned}\ker\phi &= \{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2:\ \phi((g_1,g_2))=0\}\\ &= \{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2:\ (g_1H_1,g_2H_2)=0\}\\ &= \{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2:\ g_1\in H_1, g_2\in H_2\}=H_1\times H_2\end{aligned}$$

לפי משפט האיזו' הראשון נקבל את המבוקש.

3. הוכיחו/הפירכו:

(א) תהא G חבורה ו $N,K\trianglelefteq G$ אזי $N\cap K\trianglelefteq G$.
פתרון: הוכחה: לכל $x\in N\cap K$ ולכל $g\in G$ צריך להוכיח כי $g^{-1}xg\in N\cap K$.
אכן אם $x\in N\cap K$ אזי $x\in N$ וגם $x\in K$ ולכן לכל $g\in G$ מתקיים $g^{-1}xg\in N$ וגם $g^{-1}xg\in K$ ולכן גם

$$g^{-1}xg\in N\cap K$$

כנדרש.

(ב) תהא G חבורה ו $N,K\leq G$ כך ש $K\trianglelefteq G$ וגם $N\trianglelefteq K$ אזי $K\trianglelefteq G$.
פתרון: הפרכה: עבור $G=S_4$ מתקיים כי $K=\{id,(1,2)(3,4),(1,3)(2,4),(1,4)(2,3)\}$ חבורה נורמלית ב S_4 וגם $N=\{id,(1,2)(3,4)\}$ נורמלית ב K כי $|K/N|=\frac{|K|}{|N|}=\frac{4}{2}=2$(ומשיעורי בית, במקרה זה N נורמלית) אבל N אינה נורמלית ב G כי עבור $g=(1,3)\in G,(1,2)(3,4)\in N$ מתקיים כי

$$g^{-1}(1,2)(3,4)g=(3,2)(1,4)\notin N$$

4. תהא G חבורה ו $N,K\trianglelefteq G$ שתי תתי חבורה נורמליות המקיימות $N\cap K=\{e\}$. הוכיחו כי

$$\forall x\in N,y\in K:\ xy=yx$$

[הדרכה: התבוננו ב $x^{-1}y^{-1}xy$]
פתרון: יהא $x\in N,y\in K$. מהגדרת N חבורה נורמאלית נקבל כי

$$y^{-1}xy\in N$$

ומסגירות בחבורה נקבל כי גם

$$x^{-1}y^{-1}xy\in N$$

באופן דומה, מנורמליות של K נקבל כי

$$x^{-1}y^{-1}x\in K$$

ועם סגירות

$$x^{-1}y^{-1}xy \in K$$

ולכן

$$x^{-1}y^{-1}xy \in K \cap N = \{e\}$$

ולכן

$$x^{-1}y^{-1}xy = e$$

שזה אומר

$$xy = yx$$

5. תהא G חבורה ו $N \trianglelefteq G$ תת חבורה נורמלית המקיימת $|{}^{G}/_{N}| = p$ כאשר p מספר ראשוני.

(א) הוכיחו לכל $g \in G \setminus N$ (כל איבר בקבוצה G הפרש הקבוצה H) מתקיים כי $g, g^2, \ldots g^p$ נציגים של מחלקות שונות ב ${}^{G}/_{N}$ (ולכן $\left\{g^iN \,:\, 1 \leq i \leq p\right\} = {}^{G}/_{N}$)
פתרון: כיוון ש N נורמילית ${}^{G}/_{N}$ חבורה. כעת יהא $g \in G - N$ אזי $gN \in {}^{G}/_{N}$ שונה מהאיבר הנטרלי. נסתכל על תת החבורה הנוצרת על ידו $\langle gN \rangle \leq {}^{G}/_{N}$. גודל תת חבורה זאת צריכה לחלק את סדר החבורה = p ולכן גם היא שווה ל p־ (כי p ראשוני ו $|\langle gN \rangle| > 1$. לכן בקבוצה $\langle gN \rangle = \left\{g^iN \,:\, i \in \mathbb{N}\right\}$ יש p איברים שונים שהם $\left\{g^iN \,:\, i = 1, \ldots, p\right\}$ בפרט $g, g^2, \ldots g^p$ נציגים של מחלקות שונות

(ב) הוכיחו כי אם בנוסף $N \subseteq Z(G)$ (כלומר N מוכלת במרכז של G) אזי G חבורה חילופית (או מילים אחרות $Z(G) = G$).
פתרון: יהא $a, b \in G$. מסעיף קודם נבחר $g \in G - N$ ונקבל כי

$$G = \bigcup_{i=1}^{p} g^i H$$

כי G היא איחוד כל הקוסטים. אזי קיימים i, j כך ש $a \in g^iN,\, b \in g^jN$ ואז קיימים $n_1, n_2 \in N$ כך ש

$$a = g^i n_1,\, b = g^j n_2$$

כיוון שנתון $N \subseteq Z(G)$ בפרט n_1, n_2 מתחלפים עם כל איבר אחר ב G ואז

$$ab = g^i n_1 g^j n_2 = g^i g^j n_1 n_2 = g^j g^i n_1 n_2 = g^j n_2 g^i n_1 = ba$$

6.

(א) תהא G חבורה סופית ותהא H תת חבורה נורמלית שלה. נסמן $n=\left|{}^{G}\!/\!_{H}\right|$. הוכיחו כי לכל $g\in G$ מתקיים כי $g^{n}\in H$ [הדרכה לצורך התרגיל: משפט לגרנז'].

פתרון: כיוון ש H נורמלית אז ${}^{G}\!/\!_{H}$ חבורה. נתון שחבורה זאת מסדר n . כעת יהא $g\in G$ ואז $gH\in {}^{G}\!/\!_{H}$ ממשפט לגרנז נקבל כי

$$(gH)^{n}=H$$

כיוון ש H הוא האיבר הנטרלי ב ${}^{G}\!/\!_{H}$. מכיוון ש $(gH)^{n}=g^{n}H$ לפי הגדרת הפעולה, נקבל כי $g^{n}H=H=eH$ שזה שקול לכך ש $g^{n}=e^{-1}g^{n}\in H$.

(ב) הוכיחו כי לחבורה A_4 אין תת חבורה מסדר 6 [הדרכה לצורך התרגיל: הניחו בשלילה כי קיימת H ת"ח מסדר 6, והוכיחו כי כל המחזורים $(i_1,i_2,i_3)\in H$ עבור i_1,i_2,i_3 שונים).

פתרון: נניח בשלילה כי קיימת $H\leq A_4$ מסדר 6. כיוון ש $\left|{}^{A_4}\!/\!_{H}\right|=\frac{12}{6}=2$ נקבל כי Hנורמלית ב A_4. לכן לפי סעיף קודם נקבל כי כל $\sigma\in A_4$ מקיימת $\sigma^{2}\in H$. בפרט

$$(i_1,i_2,i_3)^{2}=(i_1,i_3,i_2)\in H$$

$1\leq i_1,i_2,i_3\leq 4$ שונים. כיוון שיש 8 כאלה ($\{(1,2,3),(1,3,2),(1,2,4),(1,4,2),(1,3,4),(1,4,3),(2,3,4),(2,4,3)\}$ נקבל כי $8\leq|H|$. סתירה.