פתרון תרגיל בית 4 תורת גלואה - תשע"ח

1. תאר הרמה (פרט להכלה הטבעית) של השיכון $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ לשיכון $E \hookrightarrow \mathbb{Q}$ כאשר E הוא שדה הפיצול של $x^3 - 5$. כמה הרמות כאלה יש? (הסבר בקצרה).

   פתרון:

   שדה הפיצול הוא $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{5}, \rho_3\right]$ יש בדיוק 6 הרמות: כל הקומבינציות של

$$\rho_3 \mapsto \rho_3^i\,,\ i = 1,2$$
$$\sqrt[3]{5} \mapsto \sqrt[3]{5}\rho_3^j\,,\ j = 0,1,2$$

   נתאר בנייה של אחת מהן: נתחיל בהרחבה הפשוטה $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]/\mathbb{Q}$: הפולינום המינימלי של $\sqrt[3]{5}$ מעל $\mathbb{Q}$ הוא $x^3 - 5$.

   העתקת ההכלה $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{C}$ לא משנה את הפולינום. השורשים הם $\sqrt[3]{5}\rho_3^j$ ולכן $\sqrt[3]{5}$ חייב ללכת לאחד מהם.

   נבחר נניח $\sqrt[3]{5} \mapsto \sqrt[3]{5}\rho_3$, זה מגדיר שיכון $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}] \hookrightarrow \mathbb{C}$.

   \כעת נתבונן בהרחבה $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{5}, \rho_3\right]/\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{5}\right]$, הפולינום המינימלי של ρ_3 מעל $\mathbb{Q}\left[\sqrt[3]{5}\right]$ הוא $x^2 + X + 1$ (מאפס, ולא תיתכן דרגה 1 כי ρ_3 לא יכול להיות בשדה ממשי).

   העתקה שהגדרנו לא משנה את הפולינום הזה (כי הוא מעל $\mathbb{Q}$). השורשים הם ρ_3, ρ_3^2 ולכן ρ יכול ללכת לאחד מהם. נבחר $\rho_3 \mapsto \rho_3$.

   בכך הגדרנו שיכון שאינו הזהות $E \hookrightarrow \mathbb{C}$.

2. יהי $f(x) \in F[x]$ ונסמן $d(x) = gcd\left(f(x), f'(x)\right)$.

() הוכיחו כי a הוא שורש כפול של $f(x)$ אם ורק אם הוא שורש של $d(x)$.

() הוכיחו כי ל- $g(x) = f(x)d(x)^{-1}$ (שימו לה שזה גם פולינום ב $F[x]$) יש בדיוק אותם שורשים כמו ל$f(x)$, ו$g(x)$ ספרבילי.

פתרון. א. ראיתם בהרצאה שאם a שורש כפול של $f(x)$ אז הוא גם שורש של $f'(x)$ כלומר ש $(x-a) \mid f(x), f'(x)$ ולכן $(x-a) \mid$ $gcd(f, f') = d(x)$ כלומר ש a שורש של $d(x)$.
מצד שני אם a שורש של $d(x)$ אז $(x-a) \mid d(x)$ ולכן $(x-a) \mid$ $f(x), f'(x)$ כלומר ש a שורש של $f'(x)$ ולכן הוא שורש כפול של $f(x)$.

ב. ברור ששורשים של $g(x)$ הם גם שורשים של $f(x)$. מצד שני: אם α שורש של $f(x)$ שהוא לא שורש של $d(x)$ אז $g(\alpha) = 0 \cdot d(\alpha)^{-1}$, ואם α שורש של $d(x)$ וגם של $f(x)$ אז לפי הסעיף הקודם הוא שורש כפול של $f(x)$ ולכן הוא עדיין שורש של $g(x)$.
נזכר שאם הריבוי (האלגברי) של שורש ב$f(x)$ הוא $k \neq 0$ אז הריבוי שלו ב $f'(x)$ הוא $k-1$. ולכן הריבוי שלו ב$d(x)$ הוא $k-1$. ואז הריבוי שלו ב$g(x)$ הוא $k-(k-1) = 1$. ומכיוון שכל שורש של $g(x)$ הוא שורש של $f(x)$ - זה בדיוק מראה שהפולינום ספרבילי.

3. קבע האם הפולינומים הבאים הם ספרבילים:

א. $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ מעל $\mathbb{Q}$.

ב. $x^p - x + a$ מעל שדה F ממאפיין $p \neq 0$, ו$a \in F$.

ג. $x^5 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 2$ מעל $\mathbb{Q}$.

פתרון. א. נחשב $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2$, מכיוון שיצאו גורמים לינאריים, מספיק לבדוק אם מישהו מהם גורם של $f(x)$ ע"י הצבה. בהצבה רואים ש2 הוא שורש של $f(x)$ ולכן $(x-2)$ הוא גורם משותף של fו- f' מה שאומר ש $f(x)$ לא ספרבילי.

ב. נחשב $f'(x) = px^{p-1} - 1 \equiv -1$ ולכן בהכרח $(f, f') = 1$ ולכן הפולינום ספרבילי.

ג. ניתן לראות (ולהיעזר בשיטה שראינו בכיתה למציאת שורשים רציונאליים) כי ± 1 הם שורשים של $f(x)$ שמתפרק ל $f(x)=(x-1)(x+1)(x^3-2x-2)$.

± 1 הם לא שורשים של x^3-2x-2 ולכן $f(x)$ ספרבילי אם ורק אם x^3-2x-2 ספרבילי. ואמנם x^3-2x-2 הוא אי־פריק (למשל לפי אייזנשטיין עם הראשוני 2) ובמאפיין 0 זה אומר שהפולינום ספרבילי.