

תרגיל בית 6 אינפי 3

1. באילו נקודות במישור הפונקציות הבאות דיפרנציאביליות? הוכח. (שימו לב שהשאלה היא לא רק לגבי $(0, 0)$ אלא לגבי כל הנקודות במישור).

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$f(x, y) = \ln(x^4 + y^6 + 1) \quad (\text{ג})$$

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{y^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (\text{ד})$$

2. נגדיר את $f(x, y) = (xy)^{\frac{2}{3}}$ על כל המישור \mathbb{R}^2 .

(א) מצא את הנגזרת $f'_x(x, y)$ בכל נקודה בה היא קיימת.

(ב) האם $f'_x(x, y)$ חסומה בסביבת $(0, 0)$?

(ג) הוכח כי $f(x, y)$ דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$.

3.

(א) תהי $f(x, y)$ פונקציה דיפרנציאביליות בנקודה $(0, 0)$. נגדיר

$$h(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & xy > 0 \\ 0 & xy \leq 0 \end{cases}$$

הוכיחו כי אם מתקיים

$$f(0, 0) = 0, \quad f'_x(0, 0) = 0, \quad f'_y(0, 0) = 0$$

אז $h(x, y)$ דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$.

(ב) תהינה $f(x, y)$ ו $g(x, y)$ שתי פונקציות דיפרנציאביליות בנקודה $(0, 0)$. נגדיר

$$h(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & xy > 0 \\ g(x, y) & xy \leq 0 \end{cases}$$

הוכיחו כי אם מתקיים

$$g(0, 0) = f(0, 0), \quad g'_x(0, 0) = f'_x(0, 0), \quad g'_y(0, 0) = f'_y(0, 0)$$

אז $h(x, y)$ דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$. (הערה: הטענה ההפוכה לטענה זו גם נכונה, מי שרוצה מוזמן לנסות להוכיח - מומלץ להשתמש בנגזרות מכוונות).

4. נגדיר פונקציה

$$f(x, y, z) = xy^2z^3$$

מצאו את הנגזרת הכיוונית של f בנקודה $(3, 2, 1)$ בכיוון $h = (h_1, h_2, h_3)$, שימו לב ש h לא בהכרח וקטור יחידה.

5. תהי $f(x, y)$ פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$ ומקיימת כי

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, t) - f(t, -t)}{t} = 1$$

מצאו את $f'_y(0, 0)$.