01.08.11

אינפי 4 - הרצאה 1

הקדמה: נגזרת: ב-$\mathbb{R}$

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ נקראת **גזירה** בנקודה $x_0\in[a,b]$ אם קיים הגבול:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

לגבול קוראים $f'(x_0)$ והוא הנגזרת של f ב-x_0.

משוואת המשיק לגרף של הפונקציה f בנק' x_0: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

אם נכתוב $h=x-x_0$: $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot h$

נסמן $\Delta f(h)=f(x_0+h)-f(x_0)$. בסביבת x_0, הפונקציה $df_{x_0}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

היא לינארית ומוגדרת ע"י $df_{x_0}(h)=f'(x_0)\cdot h$. ל-$df_{x_0}$ קוראים הדיפרנציאל של f ב-x_0.

את הנגזרת ניתן לכתוב גם: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)\cdot h}{h}=0$.

מקרה ב: $\bar{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$.

$$\bar{f}=\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}\qquad \forall i: f_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

פונ' מסוג זה ניתן לראות כמסלה.

למשל: $\bar{f}:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י: $\bar{f}(t)=(f_1(t),f_2(t))=$

$=(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

מקובל לחשוב על התחום כזמן ועל השינוי במיקום החלקיק הנע לאורך המסלה ביחס לזמן מבוטא ע"י וקטור מהירות. השינוי במיקום החלקיק מזמן a לזמן $a+h$ מבוטא ע"י הוקטור $\bar{f}(a+h)-\bar{f}(a)$.

וקטור המהירות (הממוצעת): $\frac{\bar{f}(a+h)-\bar{f}(a)}{h}$

המהירות הרגעית בזמן a: $\bar{f}'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\bar{f}(a+h)-\bar{f}(a)}{h}$

זהו וקטור המהירות.

אם גבול זה קיים, אומרים ש-$\bar{f}$ דיפרנציאבילית ב-a.

החישוב נעשה איבר-איבר. כמו בדוגמה: $f'(t_0)=(-2\pi\sin(2\pi t_0), 2\pi\cos(2\pi t_0))$

הגדרה: הישר המשיק לתמונת $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ הוא הישר העובר דרך $f(a)$ שכיוונו נתון ע"י $\bar{f}'(a)$.

דוגמה: הצגה פרמטרית של ישר העובר ב-$(2,3)$ וכיוונו $(1,3)$: $L=\{(2,3)+t\cdot(1,3)\mid t\in\mathbb{R}\}$

כמו במקרה החד מימדי, אנו מתעניינים בהעתקה הלינארית $df_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$

ומתעניינים בשאלה עד כמה היא מקרבת את פונקצית השינוי $\Delta f_a=\bar{f}(a+h)-\bar{f}(a)$

בסביבת a. מכאן ההגדרה של דיפרנציאביליות.

<u>הגדרה:</u> $\bar{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ נקראת דיפרנציאבילית בa אם יש העתקה לינארית $L:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$

כך ש: $\lim_{h\to 0}\frac{\bar{f}(a+h)-\bar{f}(a)-L(h)}{h}=0$. כש f דיפרנציאבילית בa,

כותבים $df_a=L$. במקרה זה, לכל $h\in\mathbb{R}$: $df_a(h)=h\cdot\bar{f}'(a)$

ייצוג מטריצי של df_a: $\bar{f}'(a)=\begin{pmatrix}f_1'(a)\\ \vdots \\ f_m'(a)\end{pmatrix}$

<u>מקרה 3:</u> $\bar{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

כזכור, גרף של פונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הוא משטח ב$\mathbb{R}^3$ שמעל המישור xy.

את הגרף G ניתן לראות כתמונה של הפונקציה: $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ כך:

$G=\{(x,y,f(x,y)) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$ $\quad F(x,y)=(x,y,f(x,y))$

באופן כללי עבור $n<m$ נוכל לחשוב על התמונה של הפונקציה $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$

כמשטח n מימדי ב$\mathbb{R}^m$.

כמו במקרה החד מימדי שבו בכל נקודה מצאנו וקטור משיק (=וקטור מהירות) ויצרנו

ישר משיק ע"י העתקתו לנקודת ההשקה $f(a)$, כך נעבור במקרה הרב מימדי

כמה וקטורים משיקים (בת"ל) ונשתמש בהם כדי לקבל "מישור משיק", ע"י

העתקתם אל נקודת ההשקה $\bar{f}(a)$.

<u>הגדרה:</u> יהי $V\le\mathbb{R}^m$ (תת מרחב). <u>הישריה</u> העוברת דרך $\bar{b}\in\mathbb{R}^m$ ומקבילה לV

מוגדרת ע"י: $\bar{b}+V=\{\bar{b}+\bar{v} \mid \bar{v}\in V\}$

<u>לדוגמא:</u> $V=\text{span}\{e_1,e_2\}\le\mathbb{R}^5$. לכן $V=\{(x,y,0,0,0) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$. נקח $b=(2,3,4,5,6)$

$b\in b+V$ $\quad (2,3,4,5,6)+(1,2,0,0,0)=(3,5,4,5,6)\in b+V$

כעת אם $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. המרחב המשיק למשטח S שהוא התמונה של F בתוך

$\mathbb{R}^m$ בנקודה a: צריך להכיל את כל הישרים שעוברים דרך $F(a)$ ומשיקים לעקומות

של S דרך a.

בהינתן $\bar{v}\in\mathbb{R}^n$ נתבונן בתמונה תחת F של ישר ב$\mathbb{R}^n$ שעובר דרך a ומקביל לv.

נגדיר $\gamma_v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ ע"י: $\gamma_v(t)=F(a+tv)$ $\quad \forall t\in\mathbb{R}$

נגדיר את הנגזרת הכיוונית של $\bar F$ בכיוון $\bar v$ בנקודה a ע"י: (בהנחה שהגבול קיים)

$$D_vF(a)=\lim_{h\to 0}\frac{\bar F(\bar a+h\bar v)-\bar F(a)}{h}=\lim\frac{\gamma(h)-\gamma(0)}{h}=\gamma'(0)$$

הישר $\{F(a)+tD_vF(a)\mid t\in\mathbb{R}\}$ הוא משיק ל-γ בנקודה $\bar F(a)$.

מקרה מיוחד: נגזרות חלקיות. אם נציב $v=e_i$ נקבל נגזרת חלקית:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a)=D_{e_i}F(a)$$

<u>הערה:</u> לא קשה לראות שאם $\bar v,\bar w$ מייצגים אותו ישר ב-$\mathbb{R}^n$

אז $D_vF(a)=D_wF(a)$ מייצגים אותו ישר ב-$\mathbb{R}^m$.

לכן כל ישר שעובר דרך הראשית ב-$\mathbb{R}^n$ קובע ישר משיק ב-$\mathbb{R}^m$ מהצורה $\{t\cdot D_v\bar F(a)+\bar F(a)\}$

עבור $a\in\mathbb{R}^n$ נסמן: $L_a=\{D_vF(a)\mid v\in\mathbb{R}^n\}$

<u>דוגמא:</u>

$a=(1,1)$ $\quad F(x,y)=(x+y,x-y,y)$

$F(a)=(2,0,1)$

$\gamma_v(t)=\bar F(a+tv)$

$v=(1,2)$ $\quad \gamma_v(t)=F((1,1)+t(1,2))=F(1+t,1+2t)=(3t+2,-t,2t+1)$

$\gamma_v'(t)=(3,-1,2)$

$\gamma_v'(0)=(3,-1,2)$

$\gamma_v'(0)$ זה הנגזרת הכיוונית בכיוון v.

אם נצליח להוכיח ש-L_a מרחב וקטורי, אז העתק שלו אל $F(a)$: $F(a)+L$, יקרא המרחב המשיק לתמונה של F בנקודה a.

נגדיר: $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ ע"י: $L(\bar v)=D_vF(a)$. אם נוכיח ש-L ה.ל, נקבל ש-$L_a=Im(L)$ ולכן L_a תת מרחב של $\mathbb{R}^m$.

בכלל פונקציה $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ נקראת דיפרנציאבילית בנקודה $a\in\mathbb{R}^n$ אם קיימת $k:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ לינארית כך ש:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\bar F(a+h)-\bar F(a)-k(h)}{\|h\|}=0$$

k נקראת הדיפרנציאל של $\bar F$ בנק' a ומסמנים $k(h)=df_a(h)$.

הערה מקדימה: המטריצה המייצגת את df_a היא מטריצת היעקוביאן.

בדוגמא: $F(x,y)=(x+y,x-y,y)$ $\quad J=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\\0&1\end{pmatrix}$

לכן לכל $h=\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}$: $\quad df_a(h)=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_1+h_2\\h_1-h_2\\h_2\end{pmatrix}$

משפט: אם $\bar{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ב-a אז לכל $v\in\mathbb{R}^n$, הנגזרת הכיוונית $D_vF(a)$ קיימת ומתקיים: $D_vF(a)=d_aF(v)$.

מסקנה: הפונקציה $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ שמוגדרת ע"י $L(v)=D_vF(a)$ היא לינארית ולכן $L_a=\operatorname{Im}L$ מרחב וקטורי.

הוכחת המשפט: לפי הדיפרנציאביליות ב-a:

$$\lim_{h\to0}\frac{F(a+h)-F(a)-d_aF(h)}{\|h\|}=0$$

נקח $v\in\mathbb{R}^n$ ונציב $\bar{h}=t\cdot\bar{v}$:

$$0=\lim_{t\to0^+}\frac{F(a+tv)-F(a)-d_aF(tv)}{|t|\cdot\|v\|}=\lim_{t\to0^+}\frac{F(a+tv)-F(a)-t\cdot d_aF(v)}{|t|\cdot\|v\|}=$$

$$=\frac{1}{\|v\|}\left(\lim_{t\to0^+}\frac{F(a+tv)-F(a)}{t}-df_a(v)\right)$$

לכן: $dF_a(v)=\lim_{t\to0^+}\frac{F(a+tv)-F(a)}{t}=D_vF(a)$. ■

(כי זה נכון גם עבור $t\to0^-$).

הערה: הנחנו $v\neq0$. עבור $v=0$ ברור $0=dF_a(v)=D_vF(a)$

לסיכום: כאשר $\bar{F}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ב-a, $L_a=\{D_vF(a)\mid v\in\mathbb{R}^n\}$ תת מרחב של $\mathbb{R}^m$. איבריו: נגזרות כיווניות בנקודה a (וקטורי מהירות). המרחב המשיק ל-F ב-a הוא $F(a)+L_a$.

משפט: נסמן $\frac{\partial F}{\partial x_i}=D_{e_i}F$ הנגזרות החלקיות. אז אם $\mathbb{R}^n\ni v=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ אז:

$$D_vF(a)=\alpha_1\cdot\frac{\partial F}{\partial x_1}(a)+\dots+\alpha_n\cdot\frac{\partial F}{\partial x_n}(a)$$

הוכחה: נסמן $T(v)=D_vF(a)$. לכן $T(e_i)=\frac{\partial F}{\partial x_i}(a)$

עבור $v=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ מתקיים $v=\alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n$. לכן:

$$T(v)=T(\alpha_1e_1+\dots+\alpha_ne_n)\underset{\text{כי } T \text{ לינארית}}{=}\alpha_1T(e_1)+\dots=\alpha_1\cdot\frac{\partial F}{\partial x_1}+\dots$$

הערה: ניתן לכתוב את השוויון גם כך: $D_vF(a)=\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(a),\dots,\frac{\partial F}{\partial x_n}(a)\right)\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\nabla F(a)\cdot\bar{v}$

מי המטריצה המייצגת של dF_a? ראינו e $dF_a(e_1)=\frac{\partial F}{\partial x_1}$ לכן המטריצה המייצגת היא היעקוביאן: $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$.

דוגמה: $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ מוגדרת ע"י $F(x_1,x_2)=(x_1,x_2,x_1^2-x_2^2,x_1+x_2)$

נמצא את המרחב המשיק עבור $a=(3,1)$ כלומר בנקודה $F(a)$.

$F(a)=(3,1,8,4)$

הערה מאלגברה לינארית: אם $T:V\to W$ מיוצגת ע"י מטריצה $A=(T(v_1),\dots,T(v_n))$

אז $Im\, T=span\{\text{עמודות } A\}$. במקרה שלנו $A=J(a)$.

$$A=J(a)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2x_1&-2x_2\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\6&-2\\1&1\end{pmatrix}$$

$$L_a=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\6\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

המרחב המשיק $$M=F(a)+L_a=\left\{\begin{pmatrix}3\\1\\8\\4\end{pmatrix}+t_1\begin{pmatrix}1\\0\\6\\1\end{pmatrix}+t_2\begin{pmatrix}0\\1\\-2\\1\end{pmatrix}\ \middle|\ t_1,t_2\in\mathbb{R}\right\}$$

הסתכלות נוספת על המישור המשיק למשטח ב-$\mathbb{R}^3$:

נניח $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ נתונה דיפרנציאבילית בנק' (u_0,v_0)

$$[dF(u_0,v_0)]=\left(\frac{\partial F}{\partial u},\frac{\partial F}{\partial v}\right)\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}$$

אם $h=\begin{pmatrix}\Delta u\\\Delta v\end{pmatrix}$ אז כאשר $\Delta u,\Delta v\to 0$ אז:

$$F(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v)-F(u_0,v_0)=DF_{(u_0,v_0)}\begin{pmatrix}u_0\\v_0\end{pmatrix}$$

כלומר:
$$F(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v)=F(u_0,v_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial u},\frac{\partial F}{\partial v}\right)(u_0,v_0)\begin{pmatrix}\Delta u\\\Delta v\end{pmatrix}$$

$$F(u_0+\Delta u,v_0+\Delta v)=F(u_0,v_0)+\frac{\partial F}{\partial u}(u_0,v_0)\Delta u+\frac{\partial F}{\partial v}(u_0,v_0)\Delta v+o(\Delta u,\Delta v)$$