אינפי 4 - תרגול 7

22 באוגוסט 2011

משטחים

$R:\ D\to\mathbb{R}^3$, כאשר $D\subseteq\mathbb{R}^2$.

$$R(u,\,v)=(x(u,\,v)\,,\,y(u,\,v)\,,\,z(u,\,v))$$

אזי

$$\overrightarrow{N}=\overrightarrow{R_u}\times\overrightarrow{R_v}$$

הנורמל של R.
אם מתקיים

$$N=R_u\times R_v\neq 0$$

בנק' $(u_0,\,v_0)$ אז אומרים כי הנק' רגולרית.
אם $N=0$ בנק' $(u_0,\,v_0)$ אז הנק' סינגולרית.
משטח שכל נקודותיו רגולריות נקרא משטח חלק.
נניח שS משטח חלק, $N=R_u\times R_v$.
אם $\overrightarrow{R}(u_0,\,v_0)$ פרמטריזציה C^1, N הוא וקטור רציף. אם לכל עקום סגור על משטח S הנורמל רציף אז אומרים שהמשטח דו צדדי.

אינטגרל משטחי מסוג ראשון

$$\iint_S F(x,\,y,\,z)\,ds=\iint F(x(u,\,v)\,,\,y(u,\,v)\,,\,z(u,\,v))\cdot\|R_u\times R_v\|\,dudv$$

תכונות

1. F פונק' סקלרית.
2. אם $F\equiv 1$ אז האינטגרל מבטא את שטח הפנים $A(S)$.
3. <u>משמעות פיזיקלית:</u> כאשר F פונק' הצפיפות המרחבית, האינטגרל הוא המסה.

מקרה פרטי

עבור מישור שנתון בצורה מפורשת:

$$z=f(x,\,y)$$

אז

$$\begin{aligned}
r(x,\,y) &= (x,\,y,\,z(x,\,y))\\
r_x\times r_y &= (-z_x,\,-z_y,\,1)\\
\|r_x\times r_y\| &= \sqrt{z_x^2+z_y^2+1}\\
\iint_S &= \iint F\cdot\sqrt{z_x^2+z_y^2+1}
\end{aligned}$$

תרגיל

$$f\left(x,\,y,\,z\right)=x\left(y+z\right)$$

S הוא חלק מהמשטח הגלילי

$$x=\sqrt{1-y^{2}}$$

בין המישורים $z=0,\,z=1$.
חשב את האינטגרל:

$$I=\iint_{S}f\left(x,\,y,\,z\right)ds$$

פתרון

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt{1-y^{2}}\\
x_{y} &= \frac{-y}{\sqrt{1-y^{2}}}\\
x_{z} &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{1+x_{y}^{2}+x_{z}^{2}}=\sqrt{1+\frac{y^{2}}{1-y^{2}}}dydz\\
&= \sqrt{\frac{1}{1-y^{2}}}dydz=\frac{1}{\sqrt{1-y^{2}}}dydz
\end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{D_{yz}}\sqrt{1-y^{2}}\cdot\left(y+z\right)\cdot\frac{dydz}{\sqrt{1-y^{2}}}\\
&= \iint_{D_{yz}}\left(y+z\right)dydz=\int_{-1}^{1}dy\int_{0}^{1}\left(y+z\right)dz=1
\end{aligned}$$

אינטגרל משטחי סוג 2

$$\begin{aligned}
\iint_{S}\overrightarrow{F}\cdot\hat{n}ds &= \iint_{S}\overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{ds}\\
&= \iint_{S}F\left(r\left(u,\,v\right)\right)\cdot\left(r_{x}\times r_{y}\right)dudv\\
&= \iint_{D}F\left(x\left(u,\,v\right),\,y\left(u,\,v\right),\,z\left(u,\,v\right)\right)\left(r_{x}\times r_{y}\right)dudv
\end{aligned}$$

1. כיוון הנורמל למשטח S חשוב.
עבור משטח סגור כיוון חיובי הוא כיוון (שפונה החוצה מהגרף וכלוא בתוך S)
עבור משטח פתוח הצד החיובי הוא זה שרכיב z שלו חיובי.

2. משמעות פיזיקלית: שטף.

מקרה פרטי

משטח שנתון בצורה מפורשת:

$$\begin{aligned}
z &= f\left(x,\,y\right)\\
r &= \left(x,\,y,\,z\left(x,\,y\right)\right)\\
r_x\times r_y &= \left(-z_x,\,-z_y,\,1\right)\\
\iint F\cdot\left(r_x\times r_y\right)dxdy &= \iint\left(-Pz_x-Qz_y+1\right)dxdy
\end{aligned}$$

תרגיל

$$\iint_S\left(2x+3y+4z\right)dxdy$$

כאשר S הוא הצד העליון של חלק המישור

$$x+y+z-6=0$$

הנגזר על ידי המשטח הגלילי:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

פתרון

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} &= 1\Rightarrow y=\pm\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\\
\cos\left(\widehat{\hat{n}\cdot\hat{k}}\right) &> 0\\
I &= \iint_{D_{xy}}\left(2x+3y+4\left(6-x-y\right)\right)dxdy\\
&= \iint_{D_{xy}}24-2x-ydxdy=\\
&= \int_{-2}^{2}dx\int\limits_{-\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}\left(24-2x-y\right)dy=144\pi
\end{aligned}$$

תרגיל

חשב את המסה של הלוחית המשולשת:

$$\begin{aligned}
x,\,y,\,z &\geq 0\\
x+y+z &= 1
\end{aligned}$$

כאשר הצפיפות המשטחית היא

$$\gamma\left(x,\,y,\,z\right)=\frac{1}{\left(1+x+y\right)^2}$$

פתרון

$$
\begin{aligned}
S:\ x+y+z-1 &= 0\\
ds &= \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\\
&= \sqrt{1+1+1}\\
&= \sqrt{3}dxdy\\
m &= \iint_S \gamma ds\\
&= \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{3}dxdy}{(1+x+z)^2}\\
&= \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{3}dxdy}{(1+x+(1-x-y))^2}\\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(2-y)^2} = \sqrt{3}\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

תרגיל

חשבו את השטף של השדה הוקטורי

$$F=\left(x,\,y^2,\,z^2\right)$$

דרך הצד החיצוני של פני הגליל שמוגבל ע"י המשטחים:

$$
\begin{aligned}
x^2+y^2 &= R^2\\
z &= -h\\
z &= h
\end{aligned}
$$

פתרון

נחלק את המשטח ל-3 משטחים - משטח המעטפת בצד הגליל (S_1), משטח העיגול בחלק העליון של הגליל (S_2), משטח העיגול בחלק התחתון של הגליל (S_3).
נוח להציג את המשטח S_1 בצורה וקטורית:

$$r=R\cos t\cdot\hat{i}+R\sin t\cdot\hat{j}+z\hat{k}$$

שטף של שדה וקטורי F דרך משטח זה הוא:

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{S_1} F\cdot(r_t\times r_z)\,dtdz\\
&= \iint_{D_{tz}} \begin{vmatrix} R\cos t & R^2\sin^2 t & z^2\\ -R\sin t & R\cos t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} dtdz\\
&= \iint_{D_{tz}} R^2\cos^2 t+R^3\sin^3 t\,dtdz\\
&= \int_{-h}^{h} dz\int_0^{2\pi}\left(R^2\cos^2 t+R^3\sin^3 t\right)dtdz\\
&= 2h\cdot R^2\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t\right)dt+2h\cdot R^3\int_0^{2\pi}\sin^3 t dt\\
&= 4hR^2\int_0^{2\pi}(1+\cos 2)\,dt-2hR^3\int_0^{2\pi}\left(1-\cos^2 t\right)d\left(\cos t\right)
\end{aligned}
$$

נחשב שטף דרך S_2:

$$\begin{aligned} S_2:\ x^2+y^2 &\le R^2 \\ z &= h \\ \cos\left(\hat{n}\cdot\hat{k}\right) &> 0 \end{aligned}$$

אזי

$$I_2 = \iint_{S_2} \overrightarrow{F}\overrightarrow{ds} = \iint_{S_2} xdydx + y^2dxdz + z^2dxdy$$

נשים לב שI_3 הופכי לI_2 לכן:

$$I_3 = -I_2$$

(נגמר זמן התרגול, המשך התרגיל יעלה לאתר).