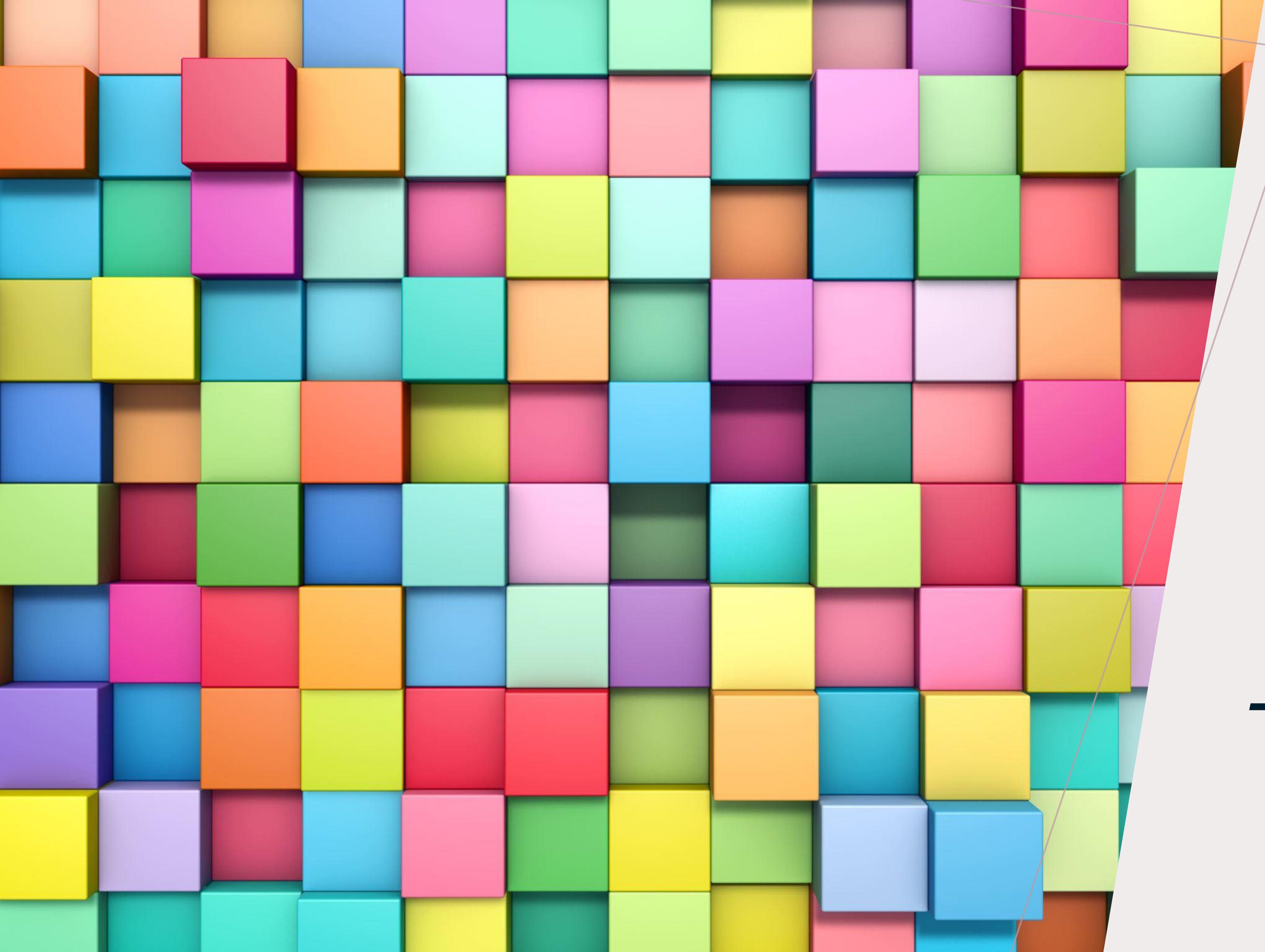

המרחב הדואלי

תרגול 12-
אושרית

המרחב הדואלי-הגדרות:

פונקציונל

<u>הגדרה</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. העתקה ליניארית $\varphi : V \to$ F נקראת פונקציונל.

מרחב דואלי

<u>הגדרה</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. אוסף כל הפונקציונלים מ V נקרא מרחב דואלי של V ומסומן ב V^*.

דוגמאות:

1. $tr : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ הוא פונקציונל.
2. $\varphi : \mathbb{F}^3 \to \mathbb{F}$ המוגדרת על ידי $\phi(x,y,z) = x+y+z$ היא פונקציונל ליניארי.
3. $\det : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ אינה פונקציונל. כי דטרמיננטה אינה העתקה ליניארית.

לדוגמא: לא מכבדת
חיבור

משפט - הגדרה

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$, $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ בסיס של V, אזי $B^*=\{\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n\}$,

$\varphi_i(v_j):=\delta_{ij}:=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ בסיס של V^* והוא נקרא הבסיס הדואלי.

תרגיל:

יהי $V=\mathbb{R}^3$, $B=\{(1,0,3),(0,2,2),(0,2,1)\}$ בסיס. מצא את הבסיס הדואלי.

פתרון:

נשים לב ש $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+\left(-3x-\frac{1}{2}y+z\right)\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}+(3x+y-z)\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$.

בעיקרון אמורים לפתור משוואה להשגת המקדמים

נמצא את האיבר הראשון בבסיס הדואלי, כלומר יש למצוא פונקציונל המקיים:

$\varphi_1\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}=1,\varphi_1\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=0,\varphi_1\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=0$.

לפי משפט ההגדרה שלמעלה

$$\varphi_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\Leftarrow\varphi_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\varphi_1\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+\left(-3x-\frac{1}{2}y+z\right)\varphi_1\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}+(3x+y-z)\varphi_1\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=x$$

המשך פתרון:

נמצא את האיבר השני בבסיס הדואלי, כלומר יש למצוא פונקציונל המקיים:

$$\varphi_2\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}=0,\varphi_2\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=1,\varphi_2\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=0 .$$

לפי משפט ההגדרה למעלה

$$\varphi_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-3x-\frac{1}{2}y+z\Leftarrow\varphi_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\varphi_2\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+\left(-3x-\frac{1}{2}y+z\right)\varphi_2\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}+(3x+y-z)\varphi_2\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=-3x-\frac{1}{2}y+z$$

נמצא את האיבר השלישי בבסיס הדואלי, כלומר יש למצוא פונקציונל המקיים:

$$\varphi_3\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}=0,\varphi_3\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=0,\varphi_3\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=1 .$$

לפי משפט ההגדרה למעלה

$$\varphi_3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=3x+y-z\Leftarrow\varphi_3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\varphi_3\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+\left(-3x-\frac{1}{2}y+z\right)\varphi_3\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}+(3x+y-z)\varphi_3\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=3x+y-z$$

משפט

לכל $v \in V$ נגדיר פונקציה $\hat{v}: V^* \to \mathbb{F}$ על ידי $\hat{v}(\varphi) = \varphi(v)$.

כל בסיס של V^* הוא דואלי לאיזשהו בסיס של V: $C = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ בסיס של V^*, ו $C^* := \{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_n\}$ הבסיס של V^{**} הדואלי ל C, מתקיים $C = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}^*$.

תרגיל:

יהי $V = \mathbb{R}_1[t]$. (פולינומים לינאריים). נגדיר פונקציונלים לינאריים

$\varphi_1(f(t)) = \int_0^1 f(t)dt, \int_0^2 \varphi_2(f(t))dt$. כלומר: $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$. מצא את הבסיס הדואלי ל $\{\varphi_1, \varphi_2\}$.

פתרון:

צורה כללית לפולינומים בR1[x]

נחשב את הפונקציות כאשר $f(t) = a + bt$.

$$\varphi_1(f(t)) = \int_0^1 (a+bt)dt = a + \frac{b}{2}, \int_0^2 \varphi_2(f(t))dt = 2a + 2b.$$

נמצא בסיס $B = \{f_1, f_2\}$ כך ש $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ ונשתמש במשפט הקודם.

נמצא תחילה את $f_1 = a_1 + b_1 t$.

צריך להתקיים $\varphi_1(f_1)=1, \varphi_2(f_1)=0 \Leftarrow a_1+\frac{b_1}{2}=1, 2a_1+2b_1=0 \Leftarrow a_1=2, b_1=-2$

וסה"כ קיבלנו ש $f_1=2-2t$.

נמצא כעת את $f_2=a_2+b_2t$.

צריך להתקיים $\varphi_1(f_2)=0, \varphi_2(f_2)=1 \Leftarrow a_2+\frac{b_2}{2}=0, 2a_2+2b_2=1 \Leftarrow a_2=-\frac{1}{2}, b_2=1$

וסה"כ קיבלנו ש $f_2=-\frac{1}{2}+t$.

$$\left\{\hat{v}_1(\varphi)=\varphi(2-2t), \hat{v}_2(\varphi)=\varphi\left(-\frac{1}{2}+t\right)\right\}$$

<u>בדיקה</u>

נראה שאכן מתקיים

$$\hat{v}_1(\varphi_1)=1 \quad \hat{v}_1(\varphi_2)=0$$

$$\hat{v}_2(\varphi_1)=0 \quad \hat{v}_2(\varphi_1)=1$$

$$\hat{v}_1(\varphi_1)=\varphi_1(2-2t)=\int_0^1(2-2t)dt=1, \hat{v}_2(\varphi_1)=\varphi_1\left(-\frac{1}{2}+t\right)=\int_0^1\left(-\frac{1}{2}+t\right)dt=0$$

$$\hat{v}_1(\varphi_2)=\varphi_2(2-2t)=\int_0^2(2-2t)dt=0, \hat{v}_2(\varphi_2)=\varphi_2\left(-\frac{1}{2}+t\right)=\int_0^2\left(-\frac{1}{2}+t\right)dt=1$$

תרגיל:

הוכח את הטענה הבאה:

יהי V מרחב וקטורי n מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$. יהי $u \neq v \in V$, אזי קיים פונקציונל ליניארי $\varphi \in V^*$ כך ש $\varphi(u) \neq \varphi(v)$. באופן שקול – לכל $0 \neq w \in V$ קיים $\varphi \in V^*$ כך ש $\varphi(w) \neq 0$.

פתרון:

נבחר u=w
V=0

נבחר w=u-v

לכן נוכיח על מה שנוח לנו כלומר על w

תחילה נוכיח את שקילות הטענות:

$\Leftarrow$

יהי $0 \neq w \in V$. נתון שלכל $u \neq v \in V$ קיים פונקציונל ליניארי $\varphi \in V^*$ כך ש $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ ובפרט עבור $0 \neq w \in V$ קיים פונקציונל ליניארי $\varphi \in V^*$ כך ש $\varphi(w) \neq \varphi(0)$ מכיוון ש $\varphi \in V^*$ אופרטור ליניארי נקבל ש $\varphi(0) = 0$ וסה"כ נקבל $\varphi(w) \neq 0$.

$\Rightarrow$

יהי $u \neq v \in V$. נתון ש לכל $0 \neq w \in V$ קיים $\varphi \in V^*$ כך ש $\varphi(w) \neq 0$ ובפרט עבור $w = u - v$ קיים $\varphi \in V^*$ כך ש $0 \neq \varphi(w) = \varphi(u - v) = \varphi(u) - \varphi(v)$ ז"א $\varphi(u) \neq \varphi(v)$.

נוכיח את הטענה לכל $0 \neq w \in V$ קיים $\varphi \in V^*$ כך ש $\varphi(w) \neq 0$.

יהי $w \in V$, יהי $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ בסיס של V ו $B^* = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}$ הבסיס הדואלי.

מכיוון ש $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ בסיס של V קיימים סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ כך ש $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ ומכיוון ש $w \neq 0$ לפחות אחד מהסקלרים $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ שונה מאפס ז"א קיים $1 \leq k \leq n$ כך ש $\alpha_k \neq 0$.

על פי הגדרת הבסיס הדואלי $\varphi_i(v_j) := \delta_{ij} := \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

ולכן $\varphi_k(w) = \varphi_k\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_k(v_i) = \alpha_k \neq 0$

הגדרה:

מרחב
מאפס

יהי V מרחב וקטורי ו S תת קבוצה של V נגדיר את ... של S ע"י
$.S^0=\{\varphi\in V^*:\varphi(v)=0;\forall v\in S\}$

הערה

בהרצאה ראיתם ש S^0 תת מרחב של $.V^*$

לדוגמא:

$V^*=\{0\}^0$, $V^0=\{\bar{0}\}$. ($\bar{0}$ הוא פונקציונל האפס - ששולח כל וקטור ב V ל 0).

תרגיל:

תרגיל ממבחן תשע"ב מועד ב

נלמד אותו יחד בשקופית הבאה

א. נסח את ממשפט ההצגה של ריס.

ב. יהי V מרחב מכפלה פנימית ויהי $U\subseteq V$ תת מרחב.

הוכח: לכל $\varphi\in U^0$ קיים $w\in U^\perp$ יחיד כך ש $\varphi(v)=\langle v,w\rangle$ לכל $.v\in V$

פתרון:

א. לכל פונקציונאלי ליניארי φ יש וקטור יחיד u כך ש $\varphi(v)=\langle v,u\rangle$ לכל $v\in V$.

ב. יהי $\varphi\in U^0$ ובפרט $\varphi\in V^*$ וממשפט ההצגה של ריס נקבל שקיים $w\in V$ יחיד כך ש $\varphi(v)=\langle v,w\rangle$ לכל $v\in V$. נשאר להוכיח ש $w\in U^\perp$ ז"א צריך להוכיח שלכל $u\in U$ מתקיים

$\langle u,w\rangle=0$. יהי $u\in U$ ומכיוון ש $U\subseteq V$ נקבל ש $u\in V$ ואז $\varphi(u)=\langle u,w\rangle$ ומכיוון ש $\varphi\in U^0$ נקבל ש $\varphi(u)=0$ ואז $\langle u,w\rangle=0$ כדרוש.

תרגיל:

<u>תרגיל ממבחן תשע"ג מועד ב</u>

יהי V מרחב וקטורי. עבור קבוצה $S \subseteq V$, נסמן $S^0 = \{\varphi \in V^* : \varphi(v) = 0; \forall v \in S\}$.

לכל תת מרחב U של V מתקיים $\dim U + \dim U^0 = \dim V$ (אינך מתבקש להוכיח זאת.)

הוכח: יהיו $U, W \subseteq V$ תת מרחבים. אזי $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$.

פתרון:

הכלה חד כיוונית

נוכיח תחילה ש $U^0 + W^0 \subseteq (U \cap W)^0$.

יהי $\alpha \in U^0 + W^0$ ז"א $\alpha = \beta + \gamma$ כאשר $\beta \in U^0 \wedge \gamma \in W^0$.

יהי $v \in U \cap W$. $v \in U \cap W$ ולכן $v \in U$ מכיוון ש $\beta \in U^0$ נקבל ש $\beta(v) = 0$.

$v \in U \cap W$ ולכן $v \in W$ מכיוון ש $\gamma \in W^0$ נקבל ש $\gamma(v) = 0$.

סה"כ נקבל ש $\alpha(v) = \beta(v) + \gamma(v) = 0 + 0 = 0$ ולכן $\alpha \in (U \cap W)^0$.

כעת כדי ניתן להוכיח שוויון נראה ש $\dim(U \cap W)^0 = \dim(U^0 + W^0)$

ונשתמש במשפט $\dim U = \dim V \wedge U \subseteq V \Rightarrow U = V$.

על פי משפט המימדים $\dim(U^0 + W^0) = \dim U^0 + \dim W^0 - \dim(U^0 \cap W^0)$

ומכיוון ש לכל תת מרחב U של V מתקיים $\dim U + \dim U^0 = \dim V$ נקבל ש

הוספנו דים יו ודים W לשני האגפים

$$\dim(U^0 + W^0) + \dim U + \dim W = \underbrace{\dim U^0 + \dim U}_{\text{דים } V} + \underbrace{\dim W^0 + \dim W}_{\text{דים } V} - \dim(U^0 \cap W^0) =$$

$$2\dim V - \dim(U^0 \cap W^0)$$

סה"כ קיבלנו ש $\dim(U^0 + W^0) + \dim U + \dim W = 2\dim V - \dim(U^0 \cap W^0)$

ז"א $\dim(U^0 + W^0) = 2\dim V - \dim U - \dim W - \dim(U^0 \cap W^0)$.

לפי משפט המימדים

$$\dim(U\cap W)=\dim U+\dim W-\dim(U+W) \Leftarrow \dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$$

ומכיוון ש $\dim V = \dim(U+W)+\dim(U+W)^0$ נקבל ש

$$\dim(U\cap W)=\dim U+\dim W+\dim(U+W)^0-\dim V$$

מינוס
דים
של
W+U

ומכיוון ש $\dim(U\cap W)^0=\dim V-\dim(U\cap W) \Leftarrow \dim(U\cap W)^0+\dim(U\cap W)=\dim V$

נציב את הביטוי הקודם ונקבל ש

$$\dim(U\cap W)^0=2\dim V-\dim U-\dim W-\dim(U+W)^0$$

נשאר להוכיח ש $\dim(U+W)^0=\dim(U^0\cap W^0)$ נוכיח שהמרחבים וקטורים שווים ואז גם המימדים שווים.

נוכיח ש $(U+W)^0\subseteq U^0\cap W^0$.

יהי $\alpha\in(U+W)^0$. יהי $u\in U$ מכיוון ש $U\subseteq U+W$ נקבל ש $u\in U+W$ ומכיוון ש $\alpha\in(U+W)^0$ נקבל ש $\alpha\in U^0 \Leftarrow \alpha(u)=0$

יהי $w\in W$ מכיוון ש $W\subseteq U+W$ נקבל ש $w\in U+W$ ומכיוון ש $\alpha\in(U+W)^0$ נקבל ש $\alpha\in W^0 \Leftarrow \alpha(w)=0$ וסה"כ קיבלנו ש $\alpha\in U^0\cap W^0$.

נוכיח ש $(U+W)^0 \subseteq U^0 \cap W^0$.

יהי $\alpha \in U^0 \cap W^0$. יהי $v \in U+W$ ז"א $v=u+w$ כאשר $u \in U \wedge w \in W$.

מכיון ש $\alpha \in U^0 \cap W^0$ נקבל ש $\alpha \in U^0$ ואז $\alpha(u)=0$.

מכיון ש $\alpha \in U^0 \cap W^0$ נקבל ש $\alpha \in W^0$ ואז $\alpha(w)=0$.

סה"כ נקבל ש $\alpha(v)=\alpha(u+w)=\alpha(u)+\alpha(w)=0+0=0$ ז"א $\alpha \in (U+W)^0$.

בהצלחה!!!