מד"ר - תרגול 8

21 בינואר 2014

מערכת משוואות לא הומגנית עם מקדמים קבועים

$$\vec{X}\prime = A\vec{x} + g(t)$$

דוגמה 1:
$$\vec{X}\prime = A\vec{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון: נמצא פתרון הומוגני ופתרון פרטי. עבור הומוגני: $\vec{X}\prime = A\vec{x}$. נמצא ע"ע ווע" מתאימים. נקבל:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 &= -1, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \lambda_3 &= 4, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

הפתרון ההומוגני הוא :

$$X_n(t) = \alpha e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

המשוואות הדרושות לפי ווריאציות המקדמים הן הבאות כי סדר המשוואה הוא 1 ולכן גוזרים רק את הקבועים:

$$\begin{cases} \alpha\prime e^{4t} + \beta\prime e^t + \delta\prime e^{-t} &= e^t \\ \alpha\prime e^{4t} - 2\beta\prime e^t + 0 &= 0 \\ \alpha\prime e^{4t} + \beta\prime e^t - \delta\prime e^{-t} &= e^t \end{cases}$$

לאחר פתרון מערכת המשוואות נקבל:

$$\begin{aligned} \delta\prime &= 0 \\ \beta\prime &= \frac{1}{3} \\ \alpha\prime &= 2\beta\prime e^{-3t} \end{aligned}$$

לכן

$$\begin{aligned} \delta &= c_1 \\ \beta &= \frac{1}{3}t + c_2 \\ \alpha &= -\frac{2}{9}e^{-3t} + c_3 \end{aligned}$$

לכן הפתרון הכללי הוא:

$$y = \left(-\frac{2}{9}e^{-3t} + c_3\right)e^{4t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{3}t + c_2\right)e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_1e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

מיון נקודות סינגולריות

$$p(x)y\prime\prime + q(x)y\prime + R(x)y = 0$$

נבדוק את הגבולות:

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\cdot\frac{q(x)}{p(x)} \\ &\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\cdot\frac{R(x)}{p(x)} \end{aligned}$$

אם שני הגבולות הנ"ל סופיים נאמר שהנקודה x_0 סינגולרית רגולרית. כשנקודה היא סינגולרית רגולרית אפשר לפתח סביבה טור טיילור שיהיה פתרון של המשוואה.

דוגמה 2: מיין נקודות סינגולריות רגולריות $(x\sin x)y\prime\prime + \cos(x)y\prime + e^x\cdot y = 0$

פתרון:

$$\begin{aligned} p(x) &= x\sin x \\ q(x) &= \cos x \\ R(x) &= e^x \end{aligned}$$

אז x_0 נקבע ע"י המשוואה:

$$\begin{aligned} p(x_0) &= 0 \\ x_0\sin x_0 &= 0 \\ x_0 &\in \pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

נחשב את הגבולות עבור $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0} x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \cot x = \infty$$

הגבול לא קיים לכן הנק' $x_0 = 0$ היא סינגולרית אי רגולרית. נבדוק עבור $x_k = \pi k$, $k \neq 0$:

$$\lim_{x\to \pi k} (x-\pi k)\cdot\frac{\cos x}{x\sin x} = \lim_{x\to\pi k} \underbrace{\frac{(x-\pi k)}{\sin x}}_{\to 1} \cdot \frac{\cos x}{x} = \pm\frac{1}{\pi k}$$

$$\lim_{x\to \pi k} (x-\pi k)^2 \frac{e^x}{x\sin x} = \lim_{x\to\pi k} \frac{(x-\pi k)}{\sin x} \cdot \frac{(x-\pi k)e^x}{x} = 0$$

לכן הנקודות $x_k = \pi k$ עבור $k \neq 0$ הן סינגולריות רגולריות.

שיטת פרוביניוס

משתמשים בטורי טיילור כדי למצוא פתרון למשוואה מסדר שני. תהי x_0 נקודה סינגולרית רגולרית של המשוואה $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ אזי למשוואה ישנו פתרון מהצורה

$$y = (x-x_0)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} (x-x_0)^n$$

כאשר הפתרונות λ_1, λ_2 מתקבלים מהמשוואה הריבועית עבור a_0.

מקרה א'

נניח λ_1, λ_2 שורשים המקיימים את התנאים הבאים:

1. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
2. $\lambda_1 > \lambda_2$
3. $\lambda_1 - \lambda_2 \notin \mathbb{Z}$

אז הפתרונות הם מהצורה:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= (x-x_0)^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \\ y_2(x) &= (x-x_0)^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n \end{aligned}$$

כלומר $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

דוגמה 3: העזר בטור טיילור סביב $x = 0$ כדי לפתור את המד"ר הבאה:

$$2x^2 y'' + zx(x+1)y' - 3y = 0$$

פתרון: נשים לב כי יש לבדוק נקודות סינגולריות. נסמן:

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^2 \\ q(x) &= 7x(x+1) \\ R(x) &= -3 \end{aligned}$$

קל לראות ש$x=0$ היא נקודה סינגולרית.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} x \cdot \frac{7x(x+1)}{2x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{7(x+1)}{2} = \frac{7}{2} \\ \lim_{x\to 0} x^2 \frac{-3}{2x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{-3}{2} = -1.5 \end{aligned}$$

לכן $x=0$ סינגולרית רגולרית. ידוע כי קיים פתרון מהצורה $y = x^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. נחפש λ מתאימה ע"י הצבה במשוואה:

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} \\ y\prime &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\lambda) x^{n+\lambda-1} \\ y\prime\prime &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1) x^{n+\lambda-2} \end{aligned}$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)a_n x^{n+\lambda} + 7(x+1)\sum_{n=0}(n+\lambda)a_n x^{n+\lambda} - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} = 0$$

$$2a_0\lambda(\lambda-1)+7a_0\lambda-3a_0+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[a_n \cdot 2(\lambda+n)(\lambda+n-1) + 7(\lambda+n) - 3) + 7(n+\lambda-1)a_{n-1}\right] x^{n+\lambda} = 0$$

מהשוואות מקדמים נקבל:

$$\begin{aligned} 2a_0\lambda(\lambda-1) + 7a_0\lambda - 3a_0 &= 0 \\ a_0(\lambda^2 - 2\lambda + 7\lambda - 3) &= 0 \\ 2\lambda^2 + 5\lambda - 3 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= 0.5, -3 \end{aligned}$$

נבודד את a_n ונקבל:

$$a_n = -\frac{7(\lambda+n-1)a_{n-1}}{2(\lambda+n)(\lambda+n-1) + 7(\lambda+n) - 3}$$

נציב $\lambda_2 = -3$:

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{7(n-4)b_{n-1}}{2(n-3)(n-4)+7(n-3)-3} = -\frac{7(n-4)b_{n-1}}{2n^2-14n+24+7n-21-3} = -\frac{7(n-4)b_{n-1}}{2n^2-7n} \\ b_n &= (-1)^n \cdot b_0 \cdot \frac{7^n(n-4)(n-5)(n-6)\ldots 1\cdot(-3)(-2)(-1)\cdot 0}{\ldots} = \begin{cases} 0 & n \geq 4 \\ (\star) & n < 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$(\star)$

$$\begin{aligned}
b_1 &= -\frac{7(-3)b_0}{2-7} = -\frac{21}{5}b_0 = \frac{-7}{5}\cdot 3b_0 \\
b_2 &= -\frac{7(-2)}{8-14}(-\frac{21}{5}b_0) = \frac{49}{5}\cdot 3b_0 \\
b_3 &= -\frac{7(-1)}{18-21}(\frac{49}{5}\cdot 3b_0) = -\frac{343}{15}\cdot b_0
\end{aligned}$$

נציב $\lambda_1 = 0.5$

$$\begin{aligned}
a_n &= -\frac{7\cdot(n-0.5)a_{n-1}}{2(n+0.5)(n-0.5)+7(n+0.5)-3} = -\frac{\frac{7}{2}(n-1)a_{n-1}}{0.5(2n+1)(2n-1)+\frac{7}{2}(2n+1)-3} = -\frac{7(2n-1}{4n^2-1+14} \\
a_n &= (-1)^n a_0 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^n \cdot \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{n!(2n+7)(2n+5)(2n+3)\cdots 9}
\end{aligned}$$

לכן הפתרון יהיה:

$$y = a_0 y_1 + b_0 y_2$$

כאשר

$$\begin{aligned}
y_1 &= x^{0.5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{7}{2}\right)^n\frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{n!(2n+7)(2n+5)(2n+3)\cdots 9}x^n \\
y_2 &= x^{-3}\left(1-\frac{21}{5}x+\frac{49}{5}x^2-\frac{343}{15}x^3\right)
\end{aligned}$$