

בוחר באלגברה לינארית 1 למדעי המחשב (89-112) תשע"ח

20.12.17

מתרגלים: עוזי, יעל, עדי ואחמד.
הנחיות:

1. על הכריכה של המחברת רשמו את הפרטים הבאים:

(א) שם + ת.ז שלכם.

(ב) שם המתרגל שאליו אתם מגיעים.

2. ענו על כל השאלות.

3. יש לנמק כל תשובה!!

4. נא הקפידו על סדר.

5. ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.

6. כל שאלה שווה 37 נקודות, ובסה"כ שלושת השאלות שוות ל-111 נקודות, כל מי שיקבל מעל 100 ציונו יעוגל ל-100

7. משך הבוחן: שעה וחצי.

$$\text{תרגיל 1. נתונה המערכת} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{array} \right)$$

1. [13 נק] עבור אילו ערכי b אין למערכת הנ"ל פתרון?

2. ענה על התת-בעיה הבאים עבור ה- b שלא מקיים את הסעיף הקודם (למשל אם בסעיף 1 קבלת שעבור $b \neq 1243$ אין פתרון, אז בסעיף זה אתה צריך לענות על התת-בעיה לאחר שהצבת $b = 1243$).

(א) [8 נק] עבור אלו ערכי a יש למערכת פתרון יחיד.

(ב) [8 נק] עבור אילו ערכי a יש למערכת אינסוף פתרונות, ומצא את הפתרון הכללי במקרה זה.

(ג) [8 נק] עבור אילו ערכי a אין למערכת פתרון.

פתרון.

נדרג את המערכת

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ 1 & 1 & b \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ a & a^2 & 1 \\ 0 & 0 & b-1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-a & 1-a \\ 0 & 0 & b-1 \end{array} \right)$$

עבור $b \neq 1 \Rightarrow b-1 \neq 0$ אין פתרון היות ויש סתירה בשורה השלישית. עבור המשך התרגיל נציב

$$b = 1$$

ונקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-a & 1-a \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a^2-a & 1-a \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

יהיה פתרון יחיד כאשר אברי האלכסון שונים מ-0 כלומר $a \neq 1, 0 \rightarrow a^2 - a \neq 0$ כעת נציב את המקרים הללו ונראה מה נקבל

• עבור $a = 1$ המערכת היא

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

במקרה זה יש אינסוף פתרונות, והפתרון הכללי הוא

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• עבור $a = 0$ המערכת היא

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

ובמקרה זה יש שורת סתירה, לכן אין פתרון.

תרגיל 2. תהי מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

-1

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

1. [5 נק] מה גודל המטריצה X המקיימת $AX = B$?

2. [20 נק] מצא את המטריצה X המקיימת $AX = B$.

3. [12 נק] פתור את מערכת המשוואות.

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = 1 \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

פתרון.

היות וב- A יש 3 עמודות כדי שהכפל יהיה מוגדר ל- X חייבות להיות 3 שורות, ומכיון של- B יש 3 עמודות גם ל- X חייבות להיות 3 עמודות, לסיכום

$$X \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

כדי למצוא את X נשים לב שמתקיים

$$\begin{aligned} AX &= B \\ \downarrow \\ \frac{1}{2}AX &= \frac{1}{2}B \\ \downarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כלומר השאלה שקולה למציאת מטריצה הופכית ל-

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת נמצא את ההופכי

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \dots \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

מכאן

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לסעיף האחרון נשים לב שאת המערכת ניתן לייצג כ-

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \downarrow \\ X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A X \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &\Downarrow \\
 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &\Downarrow \\
 \begin{cases} 2x &= 4 \\ 2y &= 8 \\ 2z &= 6 \end{cases} \\
 &\Downarrow \\
 \begin{cases} x &= 2 \\ y &= 4 \\ z &= 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

תרגיל 3. נתונים 3 וקטורים v_1, v_2, v_3 בת"ל, האם הקבוצות הבאות בת"ל?

1. [18 נק] $B_1 = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3\}$

2. [19 נק] $B_2 = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 - v_3\}$

פתרון.

(א) יהיו α, β, γ כך ש-

$$\alpha v_1 + \beta (v_1 + v_2) + \gamma (v_1 + v_2 + v_3) = 0$$

לכן

$$(\alpha + \beta + \gamma) v_1 + (\beta + \gamma) v_2 + \gamma v_3 = 0$$

נשים לב ש- v_1, v_2, v_3 לכן הצ"ל הטריטוריאלי הוא היחיד שמספק לנו את וקטור ה-0 מכאן

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \beta + \gamma &= 0 \\ \gamma &= 0 \end{cases}$$

כלומר נקבל ש- $\alpha = \beta = \gamma = 0$ לכן הקבוצה B_1 בת"ל.

(ב) יהיו α, β, γ כך ש-

$$\alpha (v_1 + v_2) + \beta (v_2 + v_3) + \gamma (v_1 - v_3) = 0$$

לכן

$$(\alpha + \gamma) v_1 + (\alpha + \beta) v_2 + (\beta - \gamma) v_3 = 0$$

נשים לב ש- v_1, v_2, v_3 לכן הצ"ל הטריטוריאלי הוא היחיד שמספק לנו את וקטור ה-0 מכאן

$$\begin{cases} \alpha + \gamma &= 0 \\ \alpha + \beta &= 0 \\ \beta - \gamma &= 0 \end{cases}$$

נקבל ש- $\alpha = -1, \beta = \gamma = 1$ פותר את המערכת,

$$-1(v_1 + v_2) + 1(v_2 + v_3) + 1(v_1 - v_3) = 0$$

כלומר יש צ"ל לא טריטוריאלי שנותן את וקטור ה-0 ולכן הקבוצה B_2 היא ת"ל

בהצלחה!!