תרגיל 6

1. יהי (X,τ) מ״ט. הוכיחו ש (X,τ) טריויאלי אמ״ם לכל $\emptyset \neq A \subseteq X$, A צפופה ב X.

פתרון:

$(\Rightarrow)$ צ״ל $\tau = \{\emptyset, X\}$. נניח בשלילה כי $\emptyset, X \neq O \in \tau$ אזי $O^c \neq \emptyset, X$ סגורה ולכן $cl(O^c) = O^c \neq X$ בסתירה לנתון.

$(\Leftarrow)$ צ״ל לכל $\emptyset \neq A \subseteq X$, A צפופה ב X. תהא $\emptyset \neq A \subseteq X$ כיוון שהנתון הוא ש $\tau = \{\emptyset, X\}$ הקבוצות הסגורות היחידות הן $\{\emptyset, X\}$ ולכן $cl(A) = X$. כלומר A צפופה.

2. יהי X מרחב טופולוגי. תהיינה $U \subseteq X$ קבוצה פתוחה ו$-A \subseteq X$ קבוצה **צפופה**, כלומר $cl\left(A\right) = X$.

(א) הוכיחו: $U \subseteq cl\left(A \cap U\right)$.

פתרון:

יהא $U \ni x$ צ״ל $x \in cl\left(A \cap U\right)$. ש״ל לכל סביבה פתוחה $V \ni x$ מתקיים כי $A \cap U \cap V \neq \emptyset$. אכן, לכל V כזאת, כיוון ש $V \cap U$ פתוחה לא ריקה (כי $x \in U \cap V$) ו A צפופה מתקיים כי $A \cap U \cap V \neq \emptyset$.

(ב) הוכיחו: $cl\left(U\right) = cl\left(A \cap U\right)$.

פתרון:

$(\subseteq)$ מסעיף קודם $U \subseteq cl\left(A \cap U\right)$ ולכן $cl\left(U\right) \subseteq cl\left(A \cap U\right)$.

$(\supseteq)$ $A \cap U \subseteq U$ ולכן $cl\left(A \cap U\right) \subseteq cl(U)$

3. יהי (X,τ) מ"ט וA, B תתי קבוצות. הוכיחו/ הפריכו: במקרה שאין שוויון, האם יש הכלה שנכונה תמיד?

(א) $int(A \cap B) = int(A) \cap int(B)$

(ב) $int(A \cup B) = int(A) \cup int(B)$

פתרון:

i. $\subseteq$: $A \cap B \subseteq A$, ולכן $int(A \cap B) \subseteq int(A)$. באופן דומה, $int(A \cap B) \subseteq int(B)$. לכן $int(A \cap B) \subseteq int(A) \cap int(B)$.

$\supseteq$: $int(A) \subseteq A, int(B) \subseteq B$, לכן $int(A) \cap int(B) \subseteq A \cap B$. בנוסף, $int(A) \cap int(B)$ פתוח כחיתוך סופי של פתוחות, ולכן מוכל ב$int(A \cap B)$ (שזה האיחוד של כל הקבוצות הפתוחות שמוכלות ב$A \cap B$).

ii. $\supseteq$: $A \subseteq A \cup B$ ולכן $int(A) \subseteq int(A \cup B)$. באופן דומה $int(B) \subseteq int(A \cup B)$. לכן $int(A) \cup int(B) \subseteq int(A \cup B)$.

הכיוון השני לא נכון. נביא דוגמא נגדית. $A = [0,1], B = [1,2]$. אז $int(A \cup B) = int([0,2]) = (0,2)$. מצד שני, $int(A) \cup int(B) = (0,1) \cup (1,2)$