פיסיקה למתמטיקאים 88-320

תרגיל 6

1. הוכיחו כי אופרטור U משמר נורמה במרחב הילברט $\mathcal{H}$ אסם הוא יוניטרי [1], כלומר $U^\dagger = U^{-1} \iff \|U\varphi\| = \|\varphi\|\,,\ \forall|\varphi\rangle \in \mathcal{H}$ (הדרכה: על מנת להוכיח ש U יוניטרי התבוננו בוקטור $|\varphi\rangle + \lambda|\chi\rangle$ כאשר $|\varphi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}$ ו λ סקלר מרוכב. בדקו את המכפלה הפנימית המתאימה עבור $\lambda = 1$ ו $\lambda = i$).

כוון א: נניח ש U יוניטרי. אזי $\langle U\varphi|U\varphi\rangle = \langle\varphi|U^\dagger U\varphi\rangle = \langle\varphi|U^{-1}U\varphi\rangle = \langle\varphi|\varphi\rangle$ כלומר U משמר נורמה

כוון ב: נניח ש U משמר נורמה. צ"ל $\langle U\varphi|U\chi\rangle = \langle\varphi|\chi\rangle$ לכל $|\varphi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}$. ניקח $|\varphi\rangle + \lambda|\chi\rangle \in \mathcal{H}$ כאשר $\lambda \in \mathbb{C}$ ונחשב

$$\langle U\left(\varphi + \lambda^*\chi\right)|U\left(\varphi + \lambda\chi\right)\rangle = \left(\langle U\varphi| + \lambda^*\langle U\chi|\right)\left(|U\varphi\rangle + \lambda|U\chi\rangle\right) =$$

$$\langle U\varphi|U\varphi\rangle + |\lambda|^2\langle U\chi|U\chi\rangle + 2\mathrm{Re}\left(\lambda\langle \mathrm{U}\varphi|\mathrm{U}\chi\rangle\right) =$$

$$\left(\langle\varphi| + \lambda^*\langle\chi|\right)\left(|\varphi\rangle + \lambda|\chi\rangle\right) = \langle\varphi|\varphi\rangle + |\lambda|^2\langle\chi|\chi\rangle + 2\mathrm{Re}\left(\lambda\langle\varphi|\chi\rangle\right)$$

ולכן

$$\mathrm{Re}\left(\lambda\langle \mathrm{U}\varphi|\mathrm{U}\chi\rangle\right) = \mathrm{Re}\left(\lambda\langle\varphi|\chi\rangle\right)$$

כעת אם ניקח $\lambda = 1$ נקבל $\mathrm{Re}\left(\langle U\varphi|U\chi\rangle\right) = \mathrm{Re}\left(\langle\varphi|\chi\rangle\right)$ ועבור $\lambda = i$ נקבל $\mathrm{Im}\left(\langle U\varphi|U\chi\rangle\right) = \mathrm{Im}\left(\langle\varphi|\chi\rangle\right)$ ולכן $\langle U\varphi|U\chi\rangle = \langle\varphi|\chi\rangle$

---

[1] אופרטור יוניטרי מרכזי בתורת הקוונטים הוא אופטור ההתפתחות בזמן של מערכת. נניח כי $|\psi_0\rangle$ מצב המערכת בזמן $t = 0$ ומפעילים על המערכת אופרטור הרמיטי A. ניתן לרשום את מצב המערכת בזמן t בצורה $|\psi(t)\rangle = e^{-iAt}|\psi_0\rangle$ כאשר e^{-iAt} אופרטור יוניטרי.

2. הוכיחו:

(א) את משפט ארנפסט (Ehrenfest): יהי $A(t)$ אופרטור הרמיטי (באופן כללי תלוי מפורשות בזמן), H המילטוניאן, ו $|\psi(t)\rangle$ מקיימת את משוואת שרדינגר התלויה בזמן

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$$

אזי

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle[H,A]\rangle + \langle\frac{dA}{dt}\rangle$$

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{d}{dt}\langle\psi|A|\psi\rangle = \langle\dot{\psi}|A|\psi\rangle + \langle\psi|A|\dot{\psi}\rangle + \langle\psi|\dot{A}|\psi\rangle =$$

$$\frac{i}{\hbar}\langle H\psi|A|\psi\rangle - \frac{i}{\hbar}\langle\psi|A|H\psi\rangle + \langle\psi|\dot{A}|\psi\rangle = \frac{i}{\hbar}\left(\langle\psi|HA|\psi\rangle - \langle\psi|AH|\psi\rangle\right) + \langle\psi|\dot{A}|\psi\rangle =$$

$$\frac{i}{\hbar}\langle\psi|[H,A]|\psi\rangle + \langle\psi|\dot{A}|\psi\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle[H,A]\rangle + \langle\frac{dA}{dt}\rangle$$

(ב) ע"י שימוש במשפט ארנפסט, כי מרכז המסה של פונקצית הגל של אוסילטור הרמוני עם פוטנציאל $V = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ מקיים את משוואת התנועה הקלאסית

$$\frac{d^2\langle x\rangle}{dt^2} + \omega^2\langle x\rangle = 0$$

ע"י שימוש במשפט ארנפסט ובזהות הקומוטטורים $[AB,C] = A[B,C] + [A,C]B$ נקבל

$$\frac{d\langle x\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle[H,x]\rangle = \frac{i}{\hbar}\left\langle\left[\frac{p^2}{2m},x\right]\right\rangle = \frac{i}{\hbar}\frac{-2i\hbar\langle p\rangle}{2m} = \frac{\langle p\rangle}{m}$$

$$\frac{d\langle p\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle[H,p]\rangle = \frac{i}{\hbar}\frac{m\omega^2}{2}\left\langle\left[x^2,p\right]\right\rangle = \frac{i}{\hbar}\frac{m\omega^2}{2}2i\hbar\langle x\rangle = -m\omega^2\langle x\rangle$$

מגזירה נוספת של המשוואה הראשונה והצבה של השניה נקבל

$$\frac{d^2\langle x\rangle}{dt^2} + \omega^2\langle x\rangle = 0$$

3. פונקצית הגל של חלקיק קוונטי בבור פוטנציאל אינסופי בזמן $t=0$ היא

$$\psi(x) = cx(1-x),\ \ 0 \le x \le 1$$

(א) מהו קבוע הנרמול c?

מתנאי הנרמול

$$\int_0^1 |\psi(x)|^2 dx = c^2 \int_0^1 x^2(1-x)^2 dx = 1$$

נקבל $c = \sqrt{30}$

(ב) מהי ההסתברות למצוא את החלקיק בחצי השמאלי של הבור $(0 \le x \le \frac{1}{2})$?

$|\psi(x)|^2$ סימטרית ביחס ל $x = \frac{1}{2}$ ולכן ההסתברות היא $\frac{1}{2}$

(ג) מהי ההסתברות למצוא את החלקיק במצב העצמי ה k $(\phi_k = \sqrt{2}\sin\pi k x)$?

עבור אילו ערכי k ההסתברות היא 0?

נסמן $c_k = \langle \phi_k | \psi \rangle$ ונקבל

$$Pr(\psi = \phi_k) = |c_k|^2 = \left| \sqrt{60} \int_0^1 x(1-x) \sin \pi k x dx \right|^2$$

$$= \left(-\frac{2\sqrt{60}}{(\pi k)^3} \left((-1)^k - 1 \right) \right)^2 = \begin{cases} \frac{960}{(\pi k)^6} & , k \text{ odd} \\ 0 & , k \text{ even} \end{cases}$$

(ד) מצאו ביטוי לפונקצית הגל כתלות בזמן, $\psi(x,t)$ (ניתן להשאיר בצורת סכום).

$$\psi(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t} c_k \phi_k(x) = \frac{8\sqrt{30}}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}E_{2k-1} t} \frac{\sin \pi(2k-1)x}{(2k-1)^3}$$

כאשר $E_k = \frac{\hbar^2 \pi^2 k^2}{2m}$

4. אופרטור המתאר גודל פיזיקלי נתון ע"י

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

(א) מהם הערכים האפשריים במדידת הגודל הפיזיקלי המתאים לאופרטור A?

הפולינום האפייני של A הוא $p(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda-6)$ עם ע"ע

$\lambda_1 = \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 6$

(ב) אם מצב המערכת נתון ע"י $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, מהם הערכים האפשריים במדידת A ובאילו הסתברויות הם מתקבלים (שימו לב, הוקטור אינו מנורמל)?

הו"ע המתאימים הם $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

ולכן המצב המנורמל $u = \frac{1}{\sqrt{3}} v$ ניתן לכתיבה כ $u = \frac{1}{\sqrt{3}} v_1 + \sqrt{\frac{2}{3}} v_2$ ונקבל

$$Pr(A' = 2) = \left| \frac{1}{\sqrt{3}} \right|^2 + \left| \sqrt{\frac{2}{3}} \right|^2 = 1$$

(ג) אם מצב המערכת נתון ע"י הוקטור $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, מהם הערכים האפשריים במדידת A ובאילו הסתברויות הם מתקבלים?

באופן דומה נוכל לרשום $v = \frac{1}{\sqrt{2}} v_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} v_3$ ולכן

$$Pr(A' = 2) = Pr(A' = 6) = \frac{1}{2}$$

(ד) גודל פיזיקלי אחר מתואר ע"י האופרטור $B = \begin{pmatrix} 14 & -4 & -4 \\ -4 & 6 & 4 \\ -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ אם מדדנו כרגע את הגודל הפיזיקלי המתאים ל B וקיבלנו שתוצאת המדידה היא 6, מה יתקבל אם נמדוד עכשיו את A?

הו"ע של B המתאים לע"ע $\lambda = 6$ הוא $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ולכן אם נמדוד את A לאחר שהמערכת נמצאת במצב זה, נקבל שתוצאת המדידה בודאות 2