תמורות

תמורה: תהא X קב' סופית. תמורה σ על X היא פונקציה חח"ע ועל מ-X לעצמה. את אוסף התמורות מסמנים S_X או S_n עבור $|X|=n$ וניתן להראות ביתר קלות כי $|S_n|=n!$

$$\begin{pmatrix} 1 & \to & n-options \\ 2 & \to & n-1-options \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \to & one\ \ option \end{pmatrix}.$$

צורת כתיבה: $\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

לדוג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$1\to 3$ $4\to 2$
$2\to 4$ $5\to 6$
$3\to 1$ $6\to 5$

סוג תמורות:

מחזור: היא תמורה הפועלת על תת קבוצת איברים ב-X באופן מעגלי ואיננה מזיזה את היתר, ניתן לכתוב אותה כ- $(a_1\ \ a_2\ \ \cdots\ \ a_k)$ כאשר $a_1 \mapsto a_2 \mapsto \dots \mapsto a_k \mapsto a_1$. דוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \equiv (1\ \ 2\ \ 3)$$

$(1\,3)(2\,4)(5\,6)$

חילוף: הוא מחזור של שני איברים בלבד.

$\sigma : X \to X$
$\tau : X \to X$

הרכבת תמורות: כמקרה פרטי של פונקציה נגדיר הרכבת תמורות ע"י $\tau\circ\sigma(i)=\tau(\sigma(i))$

לדוגמא: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

__פרוק תמורה למחזורים זרים ולחילופים:__

במבט על תמורה $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ ניתן לפרק את הקב' X לתתי קבוצות זרות ע"י המחזורים הפועלים ב σ (שימו לב שסדר ההרכבה בפרוק זה ניתן להחלפה) וכמו כן ניתן להגדיר את σ כרצף של חילופים (לא בהכרח זרים).

דוגמא: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} = (1 \quad 5 \quad 6 \quad 2)(3 \quad 4) = (5 \quad 6)(6 \quad 2)(2 \quad 1)(3 \quad 4)$

הערה: בכתיבה המחזורית נהוג להשמיט את המחזורים מאורך 1.

__תמורת הזהות:__ היא התמורה

$$Id \in S_n : \forall a_i \in X \qquad a_i \mapsto a_i \Rightarrow Id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix} = (1)(2)\cdots(n)$$

__תמורה הפוכה:__ לתמורה כלשהי σ היא התמורה $\tau = \sigma^{-1}$ כך ש- $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma = Id$

דוגמא: $\sigma = (1 \quad 2 \quad 3) \in S_4$ מצא $\tau = \sigma^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \equiv (1 \quad 3 \quad 2) \equiv (3 \quad 2 \quad 1)$$

אינטואיטיבית, כדי להגיע לתמורה ההפוכה, הופכים את סדר המספרים במחזור.

$\sigma = (1 \quad 2)$

$1 < 2 \qquad \underset{2}{\sigma(1)} > \underset{1}{\sigma(2)}$

__היפוך סדר:__ בתמורה הוא זוג $i, j \in \{1\ldots,n\}$ כך ש $i < j$ וגם $\sigma(i) > \sigma(j)$.

__סימן של תמורה:__ $sign\sigma = (-1)^{n(\sigma)} \quad \forall \sigma \in S_n$ כאשר $n(\sigma)$ הוא מס' היפוכי סדר ב- σ.

חילופים הם בעצם היפוך

$sign(\sigma) = -1$ אי ← 1 סה"כ

__זוגיות של תמורה:__ תמורה σ היא זוגית אמ"מ הסימן שלה הוא 1 ולכן אי זוגית אמ"מ הסימן שלה הוא -1.

$3<5 \quad 3<4$

$5 = \sigma(3) > \sigma(5) = 4 \qquad 5 = \sigma(3) > \sigma(4) = 3$

$4 < 5$

$3 = \sigma(4) < \sigma(5) = 4$

לא היפוך סה"כ

דוגמא: $sign\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = sign\Big((1\,2)\underbrace{(3\,5\,4)}_{\sigma}\Big) = sign\big((1\,2)(3\,5)(5\,4)\big)$

(-1) אי $\quad (1)$ זוגי

__תכונות חשובות:__

1. סימן של מחזור מאורך k הוא $(-1)^{k-1}$.
2. סימן של תמורה הוא מכפלת סימני מחזוריה הזרים.
3. סימן של הרכבת תמורות הוא מכפלת סימני מרכיביה.

דטרמיננטות

תהי $A\in F^{n\times n}$. כל תמורה $\sigma\in S_n$ היא בחירת n מקומות ב-A: $a_{1,\sigma(1)},\dots,a_{n,\sigma(n)}$ (כלומר רכיב בודד לכל שורה ועמודה).

$\tau=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$

לדוגמא: $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\Rightarrow \sigma=\begin{array}{l}\text{שורה}\\\text{עמודה}\end{array}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}$.

<u>דטרמיננטה:</u> $A\in F^{n\times n}$. אזי: $\det(A)=|A|=\sum_{\sigma\in S_n}sign(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$.

דוגמא:

$A=(a_{ij})\in\mathbb{F}^{2\times 2}$

$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ $\quad n=2\quad$ $S_2=\{\overset{sign(id)=1}{\underset{(1)(2)}{id}},\ \underset{sign((1\,2))=-1}{(1\,2)}\}$

$\det(A)=sign(id)\cdot a_{1\,id(1)}a_{2\,id(2)}+sign(\underset{\sigma}{(1\,2)})a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}=\sum_{\sigma\in S_2}sign(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}$

$1\cdot a_{11}a_{22}-1\,a_{12}a_{21}$

$\det(A)_{2\times2}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

$A=(a_{ij})\in\mathbb{F}^{3\times3}$

$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$

$S_3=\{\underset{\text{זוגי}}{id},\underbrace{(1\,3),(2\,3),(1\,2)}_{\text{אי}},\underbrace{(1\,2\,3)(1\,3\,2)}_{\text{זוגי}}\}$

$\det(A)=\sum_{\sigma\in S_3}sign(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}=1\cdot a_{11}a_{22}a_{33}-1a_{13}a_{22}a_{31}-1a_{11}a_{23}a_{32}-1\cdot a_{12}a_{21}a_{33}$
$+1\cdot a_{12}a_{23}a_{31}+1\cdot a_{13}a_{32}a_{21}$

לאחר סידור מחדש של הגורמים הנ"ל

$\det(A)=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$
$+a_{13}(-a_{22}a_{31}+a_{21}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{32})$

$\det(A)=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}$

מסקנה: פיתוח דטרמיננטות לפי מינורים.

$A \in F^{nxn}$. המינור ה-ij של A הוא התת מטריצה M_{ij} מגודל $(n-1)x(n-1)$ המתקבלת ע"י מחיקת השורה ה-i והעמודה ה-j ב-A.

לדוגמא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

הגדרת הדטרמיננטה בפיתוח לפי שורה/עמודה:

פיתוח לפי השורה ה-i :

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}|$$

פיתוח לפי העמודה ה-j :

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |M_{ij}|$$

זוהי בניה רקורסיבית עם הבסיס 2x2: $\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{il} \\ a_{kj} & a_{kl} \end{vmatrix} = a_{ij}a_{kl} - a_{il}a_{kj}$.

דוגמא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{1}_{a_{11}} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 8 & -1 \end{vmatrix}}_{M_{11}} - \underbrace{0}_{a_{12}} \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}_{M_{12}} + \underbrace{2}_{a_{13}} \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 8 \end{vmatrix}}_{M_{13}} = 1(-33) - 0 + 2 \cdot 24 = -33+48$$

$$\boxed{=15}$$

<u>מסקנה</u>: יהיה הכי קל לפתח לפי שורה/עמודה בעלת הכי הרבה אפסים.

<u>משפט</u>: המטריצה A הפיכה אמ"מ הדטרמיננטה שלה איננה מתאפסת.

<u>ע"מ 70, 2.6</u>:

בדוק איזו מהמטריצות הבאות הפיכה כאשר $a,b \in R$:

$|A| = \left|\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}\right| = ab - ba = 0$ לא הפיכה

$|B| = \left|\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\right| = a^2 + b^2$ תהיה הפיכה כאשר a או b שונים מ0

$\sum$ - חיבור גדול

$\prod$ - כפל גדול

<u>תכונות חשובות</u>:

1. אם ב-A שורת/עמודת אפסים אז det(A)=0
2. אם A משולשית (ובפרט אלכסונית) אז $\det(A) = \prod a_{ii}$
3. אם A מטריצת בלוקים משולשית אז $\det(A) = \prod |A_{ii}|$ (כמובן ש A_{ij} הם הבלוקים).
4. דטרמיננטה היא פונקציה כיפלית $|AB| = |A||B|$, בפרט חזקתית $|A^m| = |A|^m$ ובפרט (אם המטריצה הפיכה) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$. $\leftarrow |AA^{-1}| = |I|$
5. חשוב לציין שפעולות שורה/עמודה משפיעות על הדטרמיננטה, כלומר למטריצות שקולות שורה לאו דווקא תהיה אותה הדטרמיננטה!
כפל בסקלר α של שורה/עמודה i
אם נסמן את המטריצות האלמנטריות $E_{i,j}, E_{\alpha \cdot i}, E_{i+\alpha \cdot j}$ כפי שעשינו בעבר אז:
או במטריצה $R_i + \alpha R_j$
אחליף שורה/עמודה i,j
$$|E_{i,j}A| = -|A|$$
$$|E_{\alpha \cdot j}A| = \alpha |A|$$
$$|E_{i+\alpha \cdot j}A| = |A|$$
6. כתוצאה מ-5: $|\alpha A| = \alpha^n |A|$
7. $|A| = |A^t|$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 7 & 5 & 0 & 9 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right)$$

$|A| \cdot |A^{-1}| = |AA^{-1}| = 1$

$|A| = \frac{1}{|A^{-1}|} \rightarrow |A^{-1}| = |A|^{-1}$

$\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right| = \underbrace{2 \cdot 2}_{4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

3. יהיו B,A מטריצות כך שידוע $|A|=2$. חשב $\left|(A^{-1})^t\right|, \left|(B^{-1}AB)^9\right|, \left|B^{-1}AB\right|$.

$$|(A^{-1})^t| = |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

$$|B^{-1}AB| = |B^{-1}||A||B| = \underbrace{|B^{-1}||B|}_{=1}|A| = |A|$$

$$|(B^{-1}AB)^9| = |A|^9$$

$A\in\mathbb{R}^{101\times101}$ אנטי סימטרית. הוכיחו A אינה הפיכה

$$A=-A^t \longrightarrow |A| = |-A^t| = (-1)^{101}|A^t| = -1\cdot|A|$$

$$|A| = -|A| \longrightarrow 2|A|=0 \longrightarrow |A|=0$$

אצלנו. $\mathbb{R}$2

A לא הפיכה

$A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצות ריבועיות, $|B|=-3$, $|A|=\sqrt{\frac{\pi}{2}+100i}$

$$|AB^tA^{-1}B^2| = ?$$

יהא $\alpha\in\mathbb{F}$. נגדיר $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ע"י
$$A_{ij}=\begin{cases} a & i=j \\ 1 & i\neq j\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix} \qquad |A|=?$$

1. $\sum R_i \to R_1$

$$|A|=\begin{vmatrix} a+n-1 & a+n-1 & \cdots & a+n-1 \\ 1 & a & & \vdots \\ \vdots & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & & a \end{vmatrix}=$$

2. $\forall i\neq 1 \quad R_i-R_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & & & a \end{vmatrix}=(a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \\ \vdots & & a-1 & \\ 0 & \cdots & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$=(a+n-1)(a-1)^{n-1}$$

תהי A מטריצה ממשית והפיכה המקיימת $A^4+2A=0$. חשבו את $|A|$.

$$A^4=-2A \longrightarrow |A^4|=|-2A| \longrightarrow \det(A)^4=(-2)^n\cdot\det(A)$$

$$\det(A)^4-(-2)^n\det(A)=0 \longrightarrow \det(A)\left(\det(A)^3-(-2)^n\right)=0$$

$\det(A)\neq 0$
כי נתון הפיכה

$$\det(A)^3-(-2)^n=0$$

$$\det(A)=(-2)^{\frac{n}{3}}$$

שאלה:

תהי A מטריצה ששורותיה תלויות לינארית

a. הוכח/הפרך: כל מינור של המטריצה מקיים $|A_{ij}|=0$

b. תהי A אנטי סימטרית כך ש $|A-I|=2$ חשב את $|A^2+2A+I|$

פתרון:

א) $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} \quad |M_{ij}|=1$

ב)

$$|A^2+2A+I| = |(A^2+2A+I)^t| = |A^2-2A+I| = |(A-I)^2| = 4$$