17 בינואר 2024

1. נביט בפונקציה $f\left(x,y\right)=x^{3}+xy+y^{2}$

(א) מצאו את משוואת המישור המשיק בנקודה $(1,2)$.
פתרון: משוואת המישור המשיק בנקודה $(a,b)$ הוא

$$z=f_{x}\left(a,b\right)x+f_{y}\left(a,b\right)y+C$$

אצלנו:

$$\begin{aligned}f_{x}\left(x,y\right)&=3x^{2}+y\\ f_{y}\left(x,y\right)&=x+2y\end{aligned}$$

ולכן המישור המשיק בנקודה $(1,2)$ הוא

$$\begin{aligned}z&=f_{x}\left(1,2\right)x+f_{y}\left(1,2\right)y+C\\ &=5x+5y+C\end{aligned}$$

עבור קבוע $C$ שנמצא על ידי הצבה. נציב את הנקודה

$$\left(1,2,f\left(1,2\right)\right)=\left(1,2,7\right)$$

ונקבל

$$7=5+10+C$$

ולכן $C=-8$ ומכאן לתשובה הסופית:

$$z=5x+5y-8$$

(ב) מצאו שתי נקודות בהן כיוון העליה התלולה ביותר (הנגזרת הכיוונית המקסימאלית) הוא $\vec{v}=(1,1)$
פתרון: העליה התלולה ביותר בנקודה $(x,y)$ היא בכיוון הגרדיאנט:

$$\begin{aligned}\nabla f\left(x,y\right)&=\left(f_{x}\left(x,y\right),\left(f_{y}\left(x,y\right)\right)\right)\\ &=\left(3x^{2}+y,x+2y\right)\end{aligned}$$

(את הנגזרות $f_x,f_y$ כבר מצאנו בסעיף קודם). על מנת שהגראדיאנט יהיה בכיוון $\vec{v}=(1,1)$ נדרוש ש

$$\nabla f\left(x,y\right)=\alpha\left(1,1\right)$$

עבור $\alpha \geq 0$. נמקד ב $\alpha > 0$, כלומר $3x^2 + y = \alpha, x + 2y = \alpha$, ששקול לכך ששתי הקורדיאנטות שוות וחיוביות. כלומר

$$\begin{cases} 3x^2 + y & = x + 2y \\ x + 2y & > 0 \end{cases}$$

או

$$\begin{cases} 3x^2 - x & = y \\ x + 2y & > 0 \end{cases}$$

נציב שרירותית $x = 1$ ונקבל מהמשוואה הראשונה ש $y = 2$ ואז גם אי השיוון מתקיים לכן $(1, 2)$ נקודה שמקיימת את דרישות השאלה. באופן דומה, נציב שרירותית $x = 2$, נקבל מהמשוואה הראשונה $y = 10$ ומכיוון ש $(2, 10)$ מקיימת את אי השיווין היא גם נקודה שעונה על דרישות השאלה.

2. נביט באותה הפונקציה משאלה 1.

(א) מצאו את הנקודות החשודות של $f(x, y)$ וקבעו האם הן אוכף, מינימום מקומי או מקסימום מקומי.
פתרון: הנקודות החשודות הן נקודות בהם הגרדיאנט מתאפס.
כלומר

$$\nabla f(x, y) = \left(3x^2 + y, x + 2y\right) = (0, 0)$$

או

$$\begin{cases} x + 2y & = 0 \\ 3x^2 + y & = 0 \end{cases}$$

ומהמשוואה הראשונה נקבל $x = -2y$. נציב במשוואה השניה לקבל $3 \cdot 4y^2 + y = 0$ או

$$y(12y + 1) = 0$$

שפתרונה $y = 0, -\frac{1}{12}$. קיבלנו שתי נקודות $(0, 0), \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$ (שתיהן פותרות את שתי המשוואות). כעת נחשב את הנגזרות $f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}$:

$$f_{xx} = 6x$$
$$f_{xy} = 1$$
$$f_{yy} = 2$$

ונזכר כי עבור נקודה חשודה $(x, y)$ מתקיים שאם $\Delta = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$ חיובי בנקודה היא קיצון ואם $\Delta < 0$ בנקודה היא אוכף. נבדוק אצלנו $\Delta = 12x - 1^2$. נציב את הנקודות החשודות

$$\Delta(0, 0) = -1 < 0$$
$$\Delta\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) = 1 > 0$$

ולכן $(0, 0)$ אוכף ו $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$ קיצון. נבדוק איזה קיצון על פי הסימן של $f_{xx}$ בנקודה (אם חיובי אז מיני' ואם שלילי אז מקס').

$$f_{xx}\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) = 6\left(\frac{1}{6}\right) > 1$$

ולכן $(0, 0)$ נקודת מינימום מקומית.

(ב) מצאו את המקסימום והמינימום של $f\left(x,y\right)$ בתחום $D=\left\{ \left(x,y\right)\mid0\leq x\leq1,\quad0\leq y\leq1\right\}$.

פתרון: ראינו שבפנים התחום אין נקודות חשודות לכן נותר לבדוק על השפה.

השפה מוגדרת מ 4 ישרים

$$\begin{aligned}y&=0\\y&=1\\x&=0\\x&=1\end{aligned}$$

ונקודות החיתוך בניהם הם $\left(1,0\right),\left(1,1\right),\left(0,1\right),\left(0,0\right)$. כעת נשתמש בכופלי לגרנז' בכל אחד מהישרים למצוא נקודות חשודות על השפה.

- עבור $g_{1}=y$ נקבל

$$\begin{cases}3x^{2}+y & =\lambda\cdot0\\x+2y & =\lambda\cdot1\\y & =0\end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה והשניה נקבל כי $x=1,y=0$ שאינה פותרת את המשוואה הראשונה ולכן אין נקודות חשודות במקרה זה.

- עבור $g_{2}=y-1$ נקבל

$$\begin{cases}3x^{2}+y & =\lambda\cdot0\\x+2y & =\lambda\cdot1\\y & =1\end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה והשניה נקבל כי $x=-1,y=1$ שאינה פותרת את המשוואה הראשונה ולכן אין נקודות חשודות במקרה זה.

- עבור $g_{3}=x$ נקבל

$$\begin{cases}3x^{2}+y & =\lambda\cdot1\\x+2y & =\lambda\cdot0\\x & =0\end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה והשניה נקבל כי $x=0,y=0$ שאינה פותרת את המשוואה הראשונה ולכן אין נקודות חשודות במקרה זה.

- עבור $g_{4}=x-1$ נקבל

$$\begin{cases}3x^{2}+y & =\lambda\cdot1\\x+2y & =\lambda\cdot0\\x & =1\end{cases}$$

מהמשוואה הראשונה והשניה נקבל כי $x=1,y=-\frac{1}{2}$ שאינה פותרת את המשוואה הראשונה ולכן אין נקודות חשודות במקרה זה.

לסיכום: רק נקודות החיתוך $(1,0)\,, (1,1)\,, (0,1)\,, (0,0)$ חשודות על השפה. נציב בפונקציה

$$f(x,y) = x^3 + xy + y^2$$

ונראה איפה מתקבל ערך המינימום ואיפה המקסימום.

$$f(0,0) = 0, f(0,1) = 1, f(1,1) = 3, f(1,0) = 1$$

לכן המקסימום הוא 3 והמינימום הוא 0.

3. מצאו פתרון למד"ר $3y^2xy' = y^3 - x$ המקיים $y(1) = 1$.
פתרון: נחלק ב $3y^2x$ ונסדר מחדש לקבל

$$y' - \frac{1}{3x}y = -\frac{1}{3y^2}$$

שזוהי משוואת ברנולי עם $n = -2$, $p(x) = -\frac{1}{3x}$, $q(x) = -\frac{1}{3}$.
נציב $z = y^{1-n} = y^3$ ונקבל את המשוואה

$$\frac{z'}{1-n} + p(x)z = q(x)$$

או מפורשות (בהכפלה ב $1 - n = 3$)

$$z' - \frac{1}{x}z = -1$$

שזוהי מד"ר לינארית מסדר ראשון מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ עבור $a(x) = -\frac{1}{x}, b(x) = -1$. הפתרון שלה הוא

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\mathrm{dx}\right)$$

עבור $A(x) = \int a(x)\mathrm{dx} = \int -\frac{1}{x}\mathrm{dx} = -\ln|x|$. נציב

$$\begin{aligned} e^{\ln|x|}\left(C + \int -e^{-\ln|x|}\mathrm{dx}\right) &= |x|\left(C - \int |x|^{-1}\,\mathrm{dx}\right) \\ &= |x|\,C - |x|\int |x|^{-1}\,\mathrm{dx} \end{aligned}$$

ונשים לב: עבור $x > 0$ מתקיים $|x| = x$ ואז אפשר להוריד את הערך המוחלט מ

$$|x|\int |x|^{-1}\,\mathrm{dx} = x\int x^{-1}\mathrm{dx}$$

ועבור $|x| < 0$ מתקיים $|x| = -x$ ואז

$$|x|\int |x|^{-1}\,\mathrm{dx} = -x\int -x^{-1}\mathrm{dx} = x\int x^{-1}\mathrm{dx}$$

ולכן בכל מקרה אפשר להמשיך עם $x\int x^{-1}\mathrm{dx}$. נמשיך

$$\begin{aligned} |x|\,C - |x|\int |x|^{-1}\,\mathrm{dx} &= |x|\,C - x\int x^{-1}\mathrm{dx} \\ &= |x|\,C - x\ln|x| \end{aligned}$$

ונקבל לסיכום:

$$z = |x|\,C - x\ln|x|$$

$$.y = z^{\frac{1}{1-n}} = z^{\frac{1}{3}} = \left(|x|\,C - x\ln|x|\right)^{\frac{1}{3}}$$

כעת נציב את תנאי ההתחלה $y(1)=1$ למצוא את $C$:

$$1 = \left(|1|\,C - 0\right)^{\frac{1}{3}}$$

או

$$1^3 = C$$

לכן $C=1$ והתשובה הסופית היא $y(x) = \left(|x| - x\ln|x|\right)^{\frac{1}{3}}$.

4. מצאו פתרון למד"ר $yy' - \frac{1}{1+x} = 0$ המקיים $y(0)=2$.
פתרון: נעביר אגף ונעבור לכתיב $\mathrm{dx}, \mathrm{dy}$

$$y\mathrm{dy} = \frac{\mathrm{dx}}{1+x}$$

שזוהי משוואת פרידה. נעשה אינטגרל לשני האגפים (כל אחד לפי המשתנה שלו):

$$\int y\mathrm{dy} = \frac{y^2}{2} + C$$

$$\int \frac{1}{1+x}\mathrm{dx} = \ln|1+x| + C$$

לכן

$$\frac{y^2}{2} = \ln|1+x| + C$$

ואחרי חילוץ $y$:

$$.y = \pm\sqrt{2\left(\ln|1+x| + C\right)}$$

נציב תנאי התחלה $y(0)=2$ למצוא את $C$:

$$2 = \pm\sqrt{2C}$$

נעלה בריבוע לקבל $2C = 4$ ולכן $C=2$ (וצריך לקחת את הפתרון של +). תשובה סופית

$$.y = \sqrt{2\left(\ln|1+x| + 2\right)}$$

5. כדור בעל מסה של $m = 1\mathrm{kg}$ נבעט כלפי מעלה במהירות התחלתית בגודל $v_0 = 20\mathrm{m/sec}$.

(א) בהנחה שאין התנגדות אוויר, מה הגובה המקסימאלי אליו יגיע הכדור?

פתרון: נסמן את הנקודה בה היה הכדור לפני הבעיטה ב $0$ וכיוון הבעיטה הוא לכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן $t$ (בפרט $y(0)=0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg=1\cdot g$ (כאשר $g\approx 9.8$ קבוע הכבידה) וכיוונו לכיוון השלילי. לכן הכח הוא $-g$. מהשיוון $F=ma$ (כאשר $F$ הוא הכח הפועל כל הכדור ו $a$ היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g=ma=a$$

או $-g=y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום). לכן, על ידי אינטגרל פשוט, נקבל ש

$$y'(t)=-gt+c_1$$

ו

$$y(t)=-g\frac{t^2}{2}+c_1t+c_2$$

וכעת נציב את תנאי ההתחלה לחישוב הקבועים $c_1,c_2$. נתון כי $y'(0)=20$ לכן

$$20=y'(0)=-g\cdot 0+c_1=c_1$$

ובנוסף $y(0)=0$ ולכן

$$0=y(0)=-g\frac{0^2}{2}+c_1\cdot 0+c_2=c_2$$

ולסיכום $y(t)=-g\frac{t^2}{2}+20t$. כעת נרצה למצוא את המקסימום של $y(t)$. נגזור ונשווה לאפס

$$-gt+20=0$$

לכן $t=\frac{20}{g}$. כיוון ש $y''=-g<0$ נקבל שזוהי נקודת מקסימום. נציב ב $y$ לקבלת ערך המקסימום ונקבל שהוא

$$y\left(\frac{20}{g}\right)=-g\frac{\left(\frac{20}{g}\right)^2}{2}+20\left(\frac{20}{g}\right)=-\frac{200}{g}+\frac{400}{g}=\frac{200}{g}\approx 20.4$$

ולכן הכדור יגיע $20.4$ מטר מעל נקודת ההתחלה שלו.

(ב) בהנחה שהתנגדות האוויר היא בגודל $bv$ כאשר $b=0.05$, מה הגובה המקסימאלי אליו יגיע הכדור?

פתרון: נסמן את הנקודה בה היה הכדור לפני הבעיטה ב $0$ וכיוון הבעיטה הוא לכיוון החיובי. נסמן ב $y(t)$ את המיקום של הכדור בזמן $t$ (בפרט $y(0)=0$). הכח שפועל על הכדור הוא משיכת כדור הארץ, שגודלו $mg=1\cdot g$ (כאשר $g\approx 9.8$ קבוע הכבידה) וכיוונו לכיוון השלילי. בנוסף פועל על הכדור התנגדות האוויר שהוא בגודל $bv$ וכיוונו הפוך מהכיוון של $v$ (שמ $t=0$ ועד הגובה המקסימאלי הוא בכיוון של כח הכבידה) לכן סימנו $-bv$. לכן הכח הוא $-g-bv$. מהשיוון $F=ma$ (כאשר $F$ הוא הכח הפועל כל הכדור ו $a$ היא התאוצה של הכדור) נקבל כי

$$-g-bv=ma=a$$

או $-g-by'(t)=y''(t)$ (שהרי התאוצה היא הנגזרת השניה של המיקום ומהירות היא הנגזרת של המיקום). נסמן $z=y'$ ונקבל

$$z'+bz=-g$$

שזוהי מד"ר לינארית מהצורה $z' + a(x)z = b(x)$ (עבור $a(x) = b, b(x) = -g$) שפתרונה

$$e^{-A(x)}\left(C + \int b(x)e^{A(x)}\text{dx}\right)$$

כאשר $A(x)$ קדומה של $a(x)$. אצלנו נבחר $A(x) = bx$ ונציב

$$e^{-bx}\left(C - \int ge^{bx}\text{dx}\right) = e^{-bx}\left(C - \frac{g}{b}e^{bx}\right) = e^{-bx}C - \frac{g}{b}$$

לכן:

$$z(t) = e^{-bt}C - \frac{g}{b}$$

ו

$$.y(t) = \int z(t) = \frac{e^{-bt}}{-b}C - \frac{g}{b}t + D$$

כעת נציב תנאי התחלה: $y'(0) = 20$ לכן

$$20 = y'(0) = e^{-b\cdot 0}C - \frac{g}{b} = C - \frac{g}{b}$$

ומכאן $C = 20 + \frac{g}{b}$. בנוסף $y(0) = 0$ לכן

$$0 = y(0) = \frac{e^{-b\cdot 0}}{-b}C - \frac{g}{b}\cdot 0 + D = \frac{20 + \frac{g}{b}}{-b} + D$$

ומכאן $D = \frac{20+\frac{g}{b}}{b}$. לסיכום

$$y(t) = \frac{e^{-bt}}{-b}\left(20 + \frac{g}{b}\right) - \frac{g}{b}t + \left(\frac{20 + \frac{g}{b}}{b}\right)$$

ונמצא את המקסימום של $y$ (שהוא הגובה המבוקש בשאלה). נגזור ונשווה לאפס

$$y'(t) = e^{-bt}\left(20 + \frac{g}{b}\right) - \frac{g}{b} = 0$$

לכן $e^{-bt}\left(20 + \frac{g}{b}\right) = \frac{g}{b}$ ולכן

$$t = \frac{\ln\left(\frac{\frac{g}{b}}{(20+\frac{g}{b})}\right)}{-b} = \frac{\ln\left(\frac{g}{(20b+g)}\right)}{-b}$$

ונציב ב $y''$ לבדוק שאכן זוהי נקודת מקסימום.

$$y''(t) = -b\cdot e^{-bt}\left(20 + \frac{g}{b}\right)$$

$$y''\left(\frac{\ln\left(\frac{g}{(20b+g)}\right)}{-b}\right) = -g < 0$$

ולכן זוהי נקודת מקס'. נציב ב $y$ לקבלת ערך המקסימום ונקבל שהוא

$$y\left(\frac{\ln\left(\frac{g}{(20b+g)}\right)}{-b}\right)=\frac{\frac{g}{(20b+g)}}{-b}\left(20+\frac{g}{b}\right)-\frac{g}{b}\left(\frac{\ln\left(\frac{g}{(20b+g)}\right)}{-b}\right)+\left(\frac{20+\frac{g}{b}}{b}\right)$$
$$=-\frac{g}{b^2}+\frac{g}{b^2}\cdot\ln\left(\frac{g}{(20b+g)}\right)+\left(\frac{20b+g}{b^2}\right)\approx 19.1$$

ולכן הכדור יגיע $19.1$ מטר מעל נקודת ההתחלה שלו.