פתרון מבחן תשעו מועד א

28 בינואר 2016

1. משפט מהרצאה
2. משפט מהרצאה
3.

(א) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ נדרג

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i. בסיס למרחב השורות הוא $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (שורות שונות מאפס אחרי דירוג) ו $\dim R(A) =$ 2

ii. בסיס למרחב עמודות הוא $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (עמודות הציר במדורגת הן עמודות 1+2 ולכן עמודות 1+2 ב A מהוות בסיס ל $C(A)$)

מרחב האפס: נציב s, t במשתנים החופשיים $x_3 = s, x_4 = t$ ונקבל

$$N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} s-t \\ -s \\ s \\ t \end{pmatrix} : s, t \in \mathbb{R} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

כעת

$$N(A)+C(A) = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} + span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$$

לכן מצאנו קבוצה פורשת. נבדוק אלו וקטורים בת"ל והם יהיו בסיס

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

מצאנו אכן שוקטורים אלו בת"ל ולכן הם בסיס. $\dim(N(A)+C(A))=4$

iii. ממשפט המימדים נקבל כי

$$\dim(N(A)\cap C(A)) = \dim C(A) + \dim N(A) - \dim(N(A)+C(A)) = 2+2-4=0$$

ולכן $N(A)\cap C(A)=\{0\}$ שבסיסו הוא $\emptyset$ הקבוצה הריקה.

(ב)

i. הפרכה: למשל המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ מקיימת כי $A^2=A$ ובאופן דומה $A^k=A\neq 0$ לכל kטבעי ולכן A אינה ניל' אך A אינה הפיכה (יש לה שורת אפסים)

ii. הוכחה: נניח כי A ניל' והפיכה אזי A^k לכל k טבעי גם כן מטריצה הפיכה כמכפלה של הפיכות אבל קיים k (מהגדרת הניל') כך ש $A^k=0$ שאינה הפיכה.

iii. הפרכה: נגדיר $A=B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ שתי מטריצות ניל' מסדר 2 אבל המכפלה $AB=0$ ניל' מסדר 1.

4. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

(א) בשביל לחשב את הפ"א צריך לחשב את הדטרמיננטה של $\lambda I - A = \begin{pmatrix} \lambda-1 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$ נחשב (נחבר בהתחלה את שורה 2+3 לשורה 1)

$$\left|\begin{pmatrix} \lambda-1 & 2 & -1 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix}\right| = \lambda\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \lambda-4 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda-1 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \lambda\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \lambda-6 & 0 \\ -1 & 3 & \lambda \end{pmatrix}\right| = \lambda(\lambda-6)\lambda = \lambda^2(\lambda-6)$$

ולכן ע"ע הם: $\lambda_1=0$ $6\lambda_2=$. כעת נמצא ו"ע ל λ_i ע"י מציאת בסיס ל $N(A-\lambda_i I)$:
עבור $\lambda_1=0$

$$A-0I = A \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda=0}=N(A)=\left\{\begin{pmatrix}2s-t\\ s\\ t\end{pmatrix}:\, s,t\in\mathbb{R}\right\}=spam\left\{v_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},v_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נפעיל גרם שמידט על הבסיס

$$\begin{aligned}w_1&=v_1\\ w_2&=v_2-\frac{\langle v_2,w_1\rangle}{||w_1||^2}w_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{-2}{2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ננרמל אותם ונקבל מסיס או"ג ל $V_{\lambda=0}$

$$\left\{u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},u_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

עבור $\lambda_2=6$

$$A-6I=\begin{pmatrix}-5&-2&1\\-2&-2&-2\\1&-2&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&-5\\-2&-2&-2\\-5&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&-5\\0&-6&-12\\0&-12&-24\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&-5\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda=6}=N(A-6I)=\left\{\begin{pmatrix}t\\-2t\\t\end{pmatrix}:\, t\in\mathbb{R}\right\}=spam\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ננרמל ונקבל מסיס או"ג ל $V_{\lambda=6}$

$$\left\{u_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

נגדיר $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&6\end{pmatrix}$. נגדיר $P=\begin{pmatrix}|&|&|\\u_1&u_2&u_3\\|&|&|\end{pmatrix}$ (הו"ע כעמודות) ונקבל ש P או"ג ונקבל:

$$P^tAP = D$$

נימוק ללא חישובים: ניתן לבצע ליכסון או"ג כי A סימטרית

(ב) עשינו בסעיף הקודם

(ג) מתקיים כי

$$\ker T=\{v:\, Tv=0\}=\{v:\, Av=0\}=N(A)=spam\left\{v_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},v_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

לפי משפט הדרגה מתקיים כי

$$\dim ImT = \dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker T = 3 - 2 = 1$$

בנוסף

$$ImT = \left\{Tv : v \in \mathbb{R}^3\right\} = \left\{Av : v \in \mathbb{R}^3\right\} = C(A)$$

ניקח את העמודה הראשונה $\left\{\begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ 1 \end{array}\right\}$ להיות בסיס (לפי השלישי חינם, וקטור אחד + בת"ל).

האם T חח"ע? לא כי $\ker T \neq \{0\}$

האם T על? לא כי T על גורר כי $ImT = \mathbb{R}^3$ מימד 3 אבל ראינו שהמימד 1.

(ד) נתונה A סימטרית

i. כיוון אחד: נתון שלכל u מתקיים $(Au)^t u \geq 0$. צ"ל כל הע"ע של A. יהא λ ע"ע של A אזי קיים $v \neq 0$ כך ש $Av = \lambda v$ מהנתון עבור $u = v$ נקבל

$$0 \leq (Av)^t v = (\lambda v)^t v = \lambda v^t v = \lambda ||v||^2$$

כיוון ש $||v||^2 > 0$ חיובי ממש אזי $\lambda \geq 0$ (אחרת המכפלה היתה יוצאת שלילית)

כיוון שני: נתון ל הע"ע של A. צ"ל כל u מתקיים $(Au)^t u \geq 0$.

כיוון ש A סימטרית קיים לה ליכסון או"ג וממנו נסיק שקיימת P מטריצה או"ג ו Dאלכסונית (המורכבת מע"ע של A) כך ש

$$A = PDP^t$$

כעת יהא u נתון נגדיר וקטור $u' = P^t u$ (מה שגורר $u = Pu'$, כי $P^t = P^{-1}$) ואז

$$(Au)^t u = u^t A^t u = (Pu')^t APu' = u'^t P^t APu' = u'^t P^t PDP^t Pu' = u'^t Du'$$

נותר להראות כי לכל u' וקטור מתקיים כי $u'^t Du' \geq 0$. אכן, נסמן $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

(זיכרו שכל $0 \leq \lambda_i$) ו $u' = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ ונקבל

$$u'^t Du' = (\alpha_1, \cdots \alpha_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i \geq 0$$

וסיימנו.

ii. יהיו v, u נתונים אזי $(Au)^t v \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ מטריצה מגודל 1 על 1 ולכן סימטרית־ נחשב

$$(Au)^t v = \left[(Au)^t v\right]^t = v^t (Au) \underset{A=A^t}{=} v^t A^t u = (Av)^t u$$

כנדרש.

.5

(א) מטריצה הפיכה אמ"מ הדטר' שלה שונה מאפס. נשמש בפעולות עמודה שאינם משנות דטר' על מנת לפשט קצת את המטריצה ואז נפתח לפי עמודה ראשונה

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc+a^2 & ac+b^2 & ab+c^2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ bc+a^2 & ac+b^2 & ab+c^2 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & ac+b^2-bc-a^2 & ab+c^2-bc-a^2 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & c(a-b)+(b-a)(b+a) & b(a-c)+(c-a)(c+a) \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & (a-b)\left[c-(b+a)\right] & (a-c)\left[b-(c+a)\right] \end{pmatrix}\right|$$

$$= (b-a)(a-c)\left[b-(c+a)\right]-(c-a)(a-b)\left[c-(b+a)\right]$$

$$= (b-a)(a-c)\left[b-(c+a)-(c-(b+a))\right]$$

$$= (b-a)(a-c)\left[b-c-a-c+b+a\right]$$
$$= (b-a)(a-c)2(b-c)$$

ולכן אם a,b,c מספרים שונים הדט' שונה מאפס ואז המטריצה הפיכה. ואם יש שני מספרים (לפחות) שווים מבין a,b,c אזי הדט' שווה אפס ואז המטריצה אינה הפיכה.

(ב) לא קיימת. הוכחה, נניח בשלילה שקיימת A עם הדרישות מהשאלה. אזי מהנתון $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in N(A^t)$ נקבל ש

$$0 = A^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\cdot C_1(A^t)+0\cdot C_2(A^t)+0\cdot C_3(A^t) = C_1(A^t) = R_1(A)$$

כעת לכל x מתקיים כי

$$R_1(Ax) = R_1(A)x = 0x = 0$$

בפרט לא קיים פתרון למערכת $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ כי $R_1(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = 1$

(ג) נניח בשלילה ש A אינה הפיכה. אזי קיים v שונה מאפס כך ש $Av = 0$ ואז $v^tAv = v^t0 = 0$ בניגוד לנתון.

(ד) לפי משפט קיילי המילטון מתקיים כי

$$0 = P_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I$$

וזהו צ"ל לא טריאלי (המקדם של A^n הוא 1) של המטריצות $\left\{A^n, A^{n-1}, \ldots, A, I\right\}$ שמתאפס. כלומר מטריצות אלו ת"ל.