מערך תרגול 8 מופשטת 3

נמשיך עם תרגילים הנוגעים לחישוב חבורת גלואה. אבל קודם נזכיר כלים נוספים שראיתם בהרצאה.

תזכורת 8.1 לכל הרחבה סופית K/F מתקיים $|\operatorname{Gal}(K/F)| \leq [K:F]$.

תזכורת 8.2 הרחבה K/F נקראת נורמלית אם K הוא שדה פיצול של איזשהוא פולינום ב F. תנאי שקול: לכל $a \in K$ כל השורשים של הפולינום המינימלי m_a מעל F נמצאים ב K.

דוגמא 8.3 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$ היא דוגמא קלאסית להרחבה לא נורמלית כי לא כל השורשים של x^3-2 נמצאים ב $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. לעומת זאת $\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q}$ נורמלית כי $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ שדה פיצול של x^2-2.

תזכורת 8.4 הרחבה K/F נקראת הרחבת גלואה אם היא גם נורמלית וגם ספרבילית. זה שקול לכך ש K הוא שדה פיצול של פולינום ספרבילי מעל F. מה שטוב בהרחבות גלואה זה ש K/F הרחבת גלואה אם ורק אם

$$|\operatorname{Gal}(K/F)| = [K:F]$$

תרגיל 8.5 חשבו את $\operatorname{Gal}(E/\mathbb{Q})$ כאשר E הוא שדה הפיצול של הפולינום x^3-2.

פתרון: ראשית נשים לב ששורשי הפולינום הם $\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\rho, \sqrt[3]{2}\rho^3$ כאשר ρ שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 3. ולכן חבורת גלואה היא תת חבורה של S_3 לפי משפט משבוע שעבר. בנוסף זאת הרחבת גלואה וקל לחשב ש

$$[E:\mathbb{Q}] = 6$$

ולכן חבורת גלואה היא בגודל 6 ולכן היא S_3. חבורת גלואה לא תמיד חייבת לצאת S_k כלשהוא. למשל:

תרגיל 8.6 חשבו את חבורת גלואה של $E/\mathbb{Q}$ כאשר E הוא שדה הפיצול של x^5-1.

פתרון: נסמן ב ρ שורש 5 פרימיטיבי של 1. כלומר

$$E = \mathbb{Q}(\rho)$$

הפולינום המינימלי של ρ הוא $x^4+x^3+x^2+x+1$ (הוכחנו בעבר שהפולינום הזה אי פריק). אז אנחנו יודעים ש $[E:\mathbb{Q}] = 4$ ולכן הגודל של חבורת גלואה הוא 4. כעת צריך להחליט אם היא $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ או $\mathbb{Z}_4$. בשביל זה צריך להתייחס שוב לאיברים בחבורה. השורשים של הפולינום המינימלי הם $\rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4$. נסתכל על האיבר φ שמקיים

$$\varphi(\rho) = \rho^2$$

קיים כזה לפי משפט שראינו בעבר (חבורת גלואה פועלת טרזיטיבית על השורשים) אזי מתקיים

$$\varphi\varphi(\rho) = \rho^4 \neq 1$$

כלומר

$$\varphi^2 \neq \mathrm{id}$$

כלומר יש בחבורת גלואה איבר מסדר שונה מ 2 ולכן

$$\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q}) = \mathbb{Z}_4$$

תרגיל 8.7 חשבו את חבורת גלואה של $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)/\mathbb{Q}$.

פתרון: נשים לב ש $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ הוא שדה הפיצול של הפולינום הספרבילי $(x^2+1)(x^2-2)$. היות שאנחנו כבר יודעים ש

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i) : \mathbb{Q}] = 4$$

אנחנו יודעים שבחבורת גלואה יש 4 איברים. עכשיו צריך להחליט אם היא $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ או $\mathbb{Z}_4$. נצטרך להתייחס לאברים ספציפיים בהרחבה.

נניח φ איבר בחבורת גלואה. אנחנו כבר יודעים שחייב להתקיים

$$\varphi(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}, \quad \varphi(i) = \pm i$$

ולכן הסדר של φ בחבורת גלואה הוא לכל היותר 2. זה מחייב שחבורת גלואה היא $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

שווה לציין שאנחנו גם יודעים די בקלות איך האוטומורפיזמים האלה נראים. אנחנו יודעים שבסיס ל $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ מעל $\mathbb{Q}$ הוא

$$1, \sqrt{2}, i, \sqrt{2}i$$

לכן למשל איזומורפיזם ששולח

$$\sqrt{2} \to -\sqrt{2}$$

$$i \to -i$$

יהיה בעצם

$$\varphi(a + b\sqrt{2} + ci + d\sqrt{2}i) = a - b\sqrt{2} - ci + d\sqrt{2}i$$

תרגיל 8.8 יהי $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ פולינום מדרגה p עם $p-2$שורשים ממשיים ו 2 שורשים מרוכבים שאינם ממשיים (שורשים אלה בהכרח צמודים). נסמן ב E את שדה הפיצול שלו. הוכיחו כי

$$\mathrm{Gal}(E/F) \cong S_p$$

פתרון: כבר ראינו שחבורת גלואה משוכנת בתוך S_p. בנוסף ברור ש

$$p \mid [E:\mathbb{Q}] = |\operatorname{Gal}(E/\mathbb{Q})|$$

לפי משפט קושי זה אומר שיש בחבורת גלואה איבר מסדר p. איבר כזה חייב להיות מחזור באורך p. כמו כן, הצמוד המרוכב הוא איבר בחבורת גלואה. הוא מחליף את שני השורשים המרוכבים ומקבע את השאר. ולכן השיכון ל S_p שולח אותו לחילוף. חילוף ומחזור באורך p יוצרים את כל S_p ולכן

$$\operatorname{Gal}(E/F) \cong S_p$$

כנדרש.

תרגיל 8.9 נביט בהרחבה $E \subseteq K \subseteq F$ ונניח כי E/F נורמלית. האם K/F נורמלית? האם E/K נורמלית?

פתרון: K/F לא חייב להיות נורמלי. למשל $F=\mathbb{Q}$ $K=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ו E הוא שדה הפיצול של x^3-2.

אבל E/K כן. אם E הוא שדה הפיצול של $f(x)$ מעל F הוא גם שדה הפיצול של $f(x)$ מעל K.

תרגיל 8.10 מצאו הרחבה $E/\mathbb{Q}$. כך שחבורת גלואה שלה היא $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$.

פתרון: נבחר $E=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{5})$. ראשית זהו שדה פיצול של $(x^2-2)(x^2-3)(x^2-5)$ ולכן זו הרחבת גלואה. קל לראות שהמימד הוא 8 ולכן החבורה בגודל המתאים. בנוסף, כל איבר φ בחבורת גלואה חייב לקיים

$$\varphi(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$$

$$\varphi(\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}$$

$$\varphi(\sqrt{5}) = \pm\sqrt{5}$$

כלומר כל האיברים מסדר לכל היותר 2. חבורה זו חייבת להיות החבורה המבוקשת.