תרגיל 7.
דטרמיננטות.

1) חשבו

$$3)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix},4)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix},5)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix},6)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix},7)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$1)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\ ,\ 2)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

<u>פתרון</u>

$$1)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-1=-1 \quad , \quad 2)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3 - 2\cdot 1 = 1$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

$$4)\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2\cdot(-3)-5=1$$

$$5)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} R_2 - R_1 \to R_2 \\ \\ R_4 - 5R_3 \to R_4 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot(-7) = -7$$

$$6)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} R_4 - R_1 \to R_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2(-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$2\cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} R_3 - R_2 \to R_3 = 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4(2-9) = -28$$

$$\begin{matrix} & & & C_4 & C_5 \\ 7) & & & & \end{matrix} \qquad C_4 - 2C_5 \to C_4$$

$$7)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overset{C_3 + 2C_4 \to C_3}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 3 & -1 & -2\\ 2 & 1 & 5\end{vmatrix}\begin{matrix}R_1+2R_2\to R_2\\ \\ R_3+R_2\to R_3\end{matrix}=\begin{vmatrix}7 & 0 & -7\\ 3 & -1 & -2\\ 5 & 0 & 3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}7 & -7\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-7(3+5)=-56$$

2. חשב ב 3 דרכים שונים $\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -3 & -1\\ -1 & 4 & 1\\ 1 & 9 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}$

<u>פתרון</u>

(1

דרך 1: "מגן דוד"

$$1)\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}\overset{\text{לסמן}}{=}|A|$$

$$|A|=1\cdot1\cdot3+2\cdot(-2)\cdot2+4\cdot1\cdot1-4\cdot1\cdot2-1\cdot2\cdot3-1\cdot1\cdot(-2)=-13$$

דרך 2: דירוג

$$|A|\underset{R_3-2R_1\to R_3}{\overset{R_2-R_1\to R_2}{=}}\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & -6\\ 0 & -3 & -5\end{vmatrix}\overset{R_3-3R_2\to R_3}{=}\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & -6\\ 0 & 0 & 13\end{vmatrix}=-13$$

דרך 3: מינורים

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ 1 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -2\end{vmatrix}=$$

$$(1\cdot3+2\cdot1)-(2\cdot3-1\cdot4)+2\cdot(2\cdot(-2)-4\cdot1)=5-2+(-16)=-13$$

$$2)\begin{vmatrix}1 & -3 & -1\\ -1 & 4 & 1\\ 1 & 9 & -2\end{vmatrix}=-1$$

$$3)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}\overset{C_2-C_1\to C_2,\,C_3-C_1\to C_3}{=}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ a & b-a & c-a\\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b-a & c-a\\ b^2-a^2 & c^2-a^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b-a & c-a\\ (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a)\end{vmatrix}=$$

$$(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & 1\\ b+a & c+a\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c+a-b-a)=(b-a)(c-a)(c-b)$$

3) ידוע כי $|A|=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=\alpha$. מצא $|2A^{-1}|,|2A-5A|,\begin{vmatrix}2a & 3a+2b\\ 2c & 3c+2d\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2a+3b & 5a-b\\ 2c+3d & 5c-d\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3a-2c & a+4c\\ 3b-2d & b+4d\end{vmatrix}$

<u>פתרון</u>

$1)\ \left|2A^{-1}\right| = 2\cdot\left|A^{-1}\right| = \frac{2}{|A|} = \frac{2}{\alpha}, \qquad 2)\ |2A-5A| = |-3A| = (-3)^2\,|A| = 9\alpha$

$3)\ \begin{vmatrix} 2a & 3a+2b \\ 2c & 3c+2d \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & 3a+2b \\ c & 3c+2d \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & 2b \\ c & 2d \end{vmatrix} = 2\cdot 2\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4\alpha$

הערה: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+ka_{11} \\ a_{21} & a_{22}+ka_{21} \end{vmatrix}$

$4)\ \begin{vmatrix} 2a+3b & 5a-b \\ 2c+3d & 5c-d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 5a-b \\ 2c & 5c-d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3b & 5a-b \\ 3d & 5c-d \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & 5a-b \\ c & 5c-d \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} b & 5a-b \\ d & 5c-d \end{vmatrix} =$

$2\left(\begin{vmatrix} a & 5a \\ c & 5c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right) + 3\left(\begin{vmatrix} b & 5a \\ d & 5c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b & b \\ d & d \end{vmatrix}\right) = 2(0-\alpha) + 3\left(5\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} - 0\right) = -2\alpha - 15\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -17\alpha$

$5)\ \begin{vmatrix} 3a-2c & a+4c \\ 3b-2d & b+4d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3a & a+4c \\ 3b & b+4d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2c & a+4c \\ -2d & b+4d \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & a+4c \\ b & b+4d \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} c & a+4c \\ d & b+4d \end{vmatrix} =$

$3\begin{vmatrix} a & 4c \\ b & 4d \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = 14\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 14\alpha$

4) פתור בעזרת כלל קרמר (אם זה אפשרי) את מערכות המשוואות הבאות

$\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x+\quad 2z=2 \\ 3x+y+3z=6 \end{cases}, \quad \begin{cases} x-y+2z=11 \\ x+2y-z=11 \\ 4x-3y-3z=24 \end{cases}$

<u>פתרו</u>

$\begin{cases} x-y+2z=11 \\ x+2y-z=11 \\ 4x-3y-3z=24 \end{cases}, \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & -3 \end{vmatrix} = -30, \quad |A_x| = \begin{vmatrix} 11 & -1 & 2 \\ 11 & 2 & -1 \\ 24 & -3 & -3 \end{vmatrix} = -270, \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 2 \\ 1 & 11 & -1 \\ 4 & 24 & -3 \end{vmatrix} = -60$

$|A_z| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 11 \\ 1 & 2 & 11 \\ 4 & -3 & 24 \end{vmatrix} = -60, \quad x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-270}{-30} = 9, \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-60}{-30} = 2, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-60}{-30} = 2$

תשובה:(9,2,2)

$\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ x+\quad 2z=2 \\ 3x+y+3z=6 \end{cases} \qquad |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

$|A|=0$ ולכן אי אפשר לפתור את המערכת בעזרת כלל קרמר.

אפשר לפתור את המערכת בעזרת שיטת גאוס.

5) בדוק בעזרת דטרמיננטה האם קבוצה הבאה תלויה ליניארית $(1,2,-3),(1,1,2),(-1,0,1)$

<u>פתרון</u>

אם ווקטורים תלויים אז דטרמיננטת מטריצה שמורכבת מהווקטורים הללו שווה לאפס.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$ דטרמיננטה שונה מאפס, ולכן הווקטורים הנ"ל בלתי תלויים.

6) חשבו

$$\begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a & a+x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & a+x_{n-1} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 4 & 5 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & n & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & n-3 \\ n & 1 & 2 & 3 & \cdots & \cdots & \cdots & n-1 \end{vmatrix}$$

<u>פתרון</u>

$$1)\ \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & a+x_1 & a & \cdots & a \\ a & a & a+x_2 & \cdots & a \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & a+x_{n-1} \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{הנושאר הרוש רסחנ} \\ \text{תורוושה ראש לכמ}}}{=} \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} \end{vmatrix} = a \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}$$

$$2)\ D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 4 & 5 \\ \cdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 \\ n & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{עצבנ} = \left[\frac{n}{2}\right] \\ \text{לשתולועפ} \\ \text{ןיב רדס יוניש} \\ \text{דכ תורושה} \\ \text{הצירטמהש}}}{\underset{\substack{\text{דפהת} \\ \text{הלועפ לכ} \\ \text{ןמיס ףילחת} \\ \text{הטננימרטדלש}}}{=}} \begin{vmatrix} n & 1 & 2 & 3 \ldots\ldots n-1 \\ 0 & n-1 & n & 1 \ldots\ldots n-3 \\ ----- & ----- & ----- & ----- \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & & 3\ 4\ 5 \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & & 0\ 2\ 3 \\ 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & & 0\ 0\ 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = (-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \cdot n!$$

$\underline{n=3}$ $$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3!,$$ $\underline{n=4}$ $$D_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4!$$

$\underline{n=5}$ $$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5!,\ D_6 = -6!,\ D_7 = -7!,\ D_n = (-1)^{[n/2]} n!$$

7) A, B מטריצות מסדר 4×4. $\det(A) = a \neq 0$, $\det(B) \neq 0$.
מצאו

$\det\left(B^{-1}AB\right), \det\left(BA^2B^{-1}\right), \det\left(B^{-1}ABA\right) \quad , \det(A^{-1}), \det(-A), \det(3A), \det(A^T A), \det(A\cdot(A^T)^{-1})$

<u>פתרון</u>

$1)\ \det\left(A\cdot\left(A^T\right)^{-1}\right) = \det A\cdot\det\left(\left(A^T\right)^{-1}\right) = \det A\cdot\left(\det A^T\right)^{-1} = \det A\cdot\left(\det A\right)^{-1} = 1$

$2)\det\left(A^T\cdot A\right) = \det\left(A^T\right)\cdot\det\left(A\right) = \left(\det\left(A\right)\right)^2 = a^2$

$3)\det\left(3A\right) = 3^4\det\left(A\right) = 81a^2 \qquad 4)\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{a}$

$1)\det\left(B^{-1}\cdot A\cdot B\cdot A\right) = \left(\det B\right)^{-1}\cdot\det A\cdot\det B\cdot\det A = \frac{1}{\det B}\cdot a\cdot\det B\cdot a = a^2$

$2)\det\left(BA^2B^{-1}\right) = \det\left(B\right)\cdot\det\left(A\cdot A\right)\cdot\det\left(B^{-1}\right) = \det B\cdot\det A\cdot\det A\cdot\frac{1}{\det B} = a\cdot a = a^2$

$3)\ \det\left(B^{-1}AB\right) = \left(\det B\right)^{-1}\cdot\det\left(A\right)\cdot\det\left(B\right) = a$

8*) מספרים 289, 629, 425 מתחלקים ב 17. הוכיחו כי דטרמיננטה $\begin{vmatrix}4 & 2 & 5\\ 6 & 2 & 9\\ 2 & 8 & 9\end{vmatrix}$ גם מתחלקת ב 17.

<u>פתרון</u>

$$\begin{vmatrix}4 & 2 & 5\\ 6 & 2 & 9\\ 2 & 8 & 9\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}4 & 2 & 4*100+2*10+5\\ 6 & 2 & 6*100+2*10+9\\ 2 & 8 & 2*100+8*10+9\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}4 & 2 & 425\\ 6 & 9 & 629\\ 2 & 8 & 289\end{vmatrix} = 17\begin{vmatrix}4 & 2 & 25\\ 6 & 9 & 37\\ 2 & 8 & 17\end{vmatrix}$$

אם אחת העמודות (שורות) תתחלק במספר מסוים,אז כל הדטרמיננטה תתחלק באותו מספר.
אצלינו:עמודה שלישית מתחלקת ב-17 ,
ולכן אם דרמיננטה תתחלק בו17.