

תרגיל בית 4 תורת גלואה - תשע"ח

1. תאר הרמה (פרט להכלה הטבעית) של השיכון $\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$ לשיכון $\mathbb{Q} \hookrightarrow E$ כאשר E הוא שדה הפיצול של $x^3 - 5$. כמה הרמות כאלה יש? (הסבר בקצרה).

2. יהי $f(x) \in F[x]$ ונסמן $d(x) = \gcd(f(x), f'(x))$.

(i) הוכיחו כי a הוא שורש כפול של $f(x)$ אם ורק אם הוא שורש של $d(x)$.

(ii) הוכיחו כי ל- $g(x) = f(x)d(x)^{-1}$ (שימו לה שזה גם פולינום ב $F[x]$) יש בדיוק אותם שורשים כמו ל- $f(x)$, ו $g(x)$ ספרבילי.

3. קבע האם הפולינומים הבאים הם ספרבילים:

א. $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ מעל \mathbb{Q} .

ב. $x^p - x + a$ מעל שדה F ממאפיין $p \neq 0$, ו $a \in F$.

ג. $x^5 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 2$ מעל \mathbb{Q} .