תרגיל 12-פתרון

1. חשבו את הגבולות הבאים בעזרת משפט הסנדוויץ':

א. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1\cdot\sin(1)+2\cdot\sin(2)+\ldots+n\cdot\sin(n)}{n^3}$
פתרון:

$$0 \le \left|\frac{1\cdot\sin(1)+2\cdot\sin(2)+\ldots+n\cdot\sin(n)}{n^3}\right| \le$$

$$\le \frac{|1\cdot\sin(1)|+|2\cdot\sin(2)|+\ldots+|n\cdot\sin(n)|}{n^3} \le$$

$$\le \frac{1+2+\ldots+n}{n^3} = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{(1+n)\cdot n}{2} = \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

המעבר השני לאי השוויון נכון לפי אי שוויון המשולש, המעבר השלישי נכון כי $|\sin(x)| \le x$ לכל $x\in\mathbb{R}$, המעבר השלישי נכון לפי נוסחה של סכום n איברים ראשונים של סדרה חשבונית. לסיכום ראינו שהסדרה הנתונה חסומה בין שתי סדרות השואפות לאפס ולכן לפי משפט הסנדוויץ':

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot\sin(1)+2\cdot\sin(2)+\ldots+n\cdot\sin(n)}{n^3} = 0$$

ב. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n}$
פתרון :

$$n\cdot\frac{1}{n^2+n} \le \frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n} \le n\cdot\frac{1}{n^2+1}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} = \frac{n}{n^2+n} = \frac{n}{n^2+1} = 0$ ולכן לפי משפט הסנדוויץ'
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\ldots+\frac{1}{n^2+n} = 0$.

ג. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n+(-1)^n+9^n}$
פתרון:

$$9 = \sqrt[n]{9^n} \le \sqrt[n]{5^n+(-1)^n+9^n} \le \sqrt[n]{3\cdot 9^n} = 3^{\frac{1}{n}}\cdot 9 \xrightarrow[n\to\infty]{} 9$$

לכן לפי משפט הסנדוויץ': $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{5^n+(-1)^n+9^n} = 9$

2. הוכיחו כי הסדרות הרקורסיביות הבאות מתכנסות וחשבו את גבולותיהן:
א. סדרה המוגדרת ע"י: $a_1 = 1\ ,\ a_{n+1} = \sqrt{3\cdot a_n}$.
הוכחה: ננחש $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{3\cdot a_n} = \sqrt{3L}$$

נפתור את המשוואה על L : $L=\sqrt{3L}$ ביחס ל-L ונקבל $L=0$ או $L=3$. מאחר וכל איברי הסדרה חיוביים נקבל שהגבול האפשרי היחיד הינו $L=3$.
כעת נוכיח שהסדרה אכן מתכנסת:

הסדרה חסומה מלרע ע"י 0, כי כל איברי הסדרה חיוביים ולכן נותר להוכיח שהסדרה חסומה מלעיל. נוכיח באינדוקציה על n ש- $a_n \leq 3$

בסיס האינדוקציה: $n = 1$, $a_1 = 1 \leq 3$.

הנחת האינדוקציה: נניח ש- $a_n \leq 3$.

שלב ההוכחה: צ"ל ש- $a_{n+1} \leq 3$,

$$a_{n+1} = \sqrt{3 \cdot a_n} \leq \sqrt{3 \cdot 3} = 3$$

המעבר הראשון נכון לפי הגדרת הסדרה והמעבר השני נכון לפי הנחת האינדוקציה.

לסיכום הוכחנו ש- $a_n \leq 3$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

נוכיח שהסדרה מונוטונית עולה לכל $n \in \mathbb{N}$.

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{3 \cdot a_n} - a_n = \frac{3a_n - a_n^2}{\sqrt{3 \cdot a_n} + a_n} \geq 0$$

כי המכנה תמיד חיובי, והמונה חיובי כי הוכחנו ש $0 < a_n \leq 3$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

לסיכום הוכחנו שהסדרה חסומה ומונוטונית עולה ולכן לפי משפט הסדרה מתכנסת.

ולפי החישוב שעשינו קודם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

ב. הסדרה המוגדרת ע"י: $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$, $a_1 = 10$.

הוכחה:

ננחש את גבול הסדרה: נסמן $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right)$$

נפתור את המשוואה $L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right)$ ביחס ל-L ונקבל $L^2 - 1 = 0$ ולכן $L = 1$ או $L = -1$. אבל מאחר וכל איברי הסדרה חיוביים הגבול האפשרי היחיד הינו $L = 1$. כעת נוכיח שאכן הסדרה מתכנסת,

ראשית, נוכיח שהסדרה חסומה מלרע ע"י 1 :

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = \sqrt{1} = 1$$

המעבר הראשון נובע מהגדרת הסדרה, המעבר שני נובע מאי- שיוויון הממוצעים.(הממוצע החשבוני גדול או שווה הממוצע ההנדסי).

שנית, נראה שהסדרה מונוטונית יורדת, כלומר נראה כי לכל $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leq a_n$:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{1}\right) \leq \frac{1}{2}\left(a_n + a_n\right) = a_n$$

המעבר הראשון נובע מהגדרת הסדרה, המעבר השני נובע כיוון ש- $a_n \geq 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכן $\frac{1}{a_n} \leq 1$, המעבר השלישי נובע שוב כיוון שהראנו שהסדרה חסומה מלרע ע"י 1, כלומר ש: $1 \leq a_n$.

לסיכום הוכחנו שהסדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע ע"י 1 ולכן לפי משפט הסדרה מתכנסת, ולפי חישוב שעשינו קודם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

ג. הסדרה המוגדרת ע"י $a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(a_n + 4\right)$, $a_1 = 1$

הוכחה: ננחש $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(a_n + 4\right) = \frac{1}{3}\left(L + 4\right)$$

נפתור את המשוואה על L: $L = \frac{1}{3}\left(L + 4\right)$ לכן הגבול $L = 2$.

כעת נוכיח שאכן הסדרה מתכנסת:

ראשית, נראה כי הסדרה חסומה מלעיל ע"י 2 :

נראה זאת באינדקוציה על n,

בסיס האינדוקציה : עבור $n=1$, $a_1 = 1 \leq 2$

הנחת האינדוקציה: נניח ש $a_n \leq 2$

שלב ההוכחה: צ"ל ש- $a_{n+1} \leq 2$

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 4) \leq \frac{1}{3}(2+4) = 2$$

כאשר המעבר הראשון נובע מהגדרת הסדרה והמעבר השני נובע מהנחת האינדוקציה. לכן לכל $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq 2$.

שנית, נראה כי הסדר מונוטונית עולה: כלומר שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $a_{n+1} \geq a_n$

דרך א'-

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 4) = \frac{1}{3}(a_n + 2 + 2) \geq \sqrt[3]{a_n \cdot 2 \cdot 2} \geq \sqrt[3]{a_n \cdot a_n \cdot a_n} = a_n$$

כאשר המעבר הראשון נובע מהגדרת הסדרה, המעבר השני נובע מאי שיוויון הממוצעים, והמעבר האחרון נובע כיוון שהוכחנו באינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$, $2 \geq a_n$. לכן $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} \geq a_n$.

דרך ב'- נראה באינדוקציה על n כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} \geq a_n$:

בסיס האינדוקציה: $n=1$,

$$a_2 = \frac{1}{3}(a_1 + 4) = \frac{1}{3}(1+4) = \frac{5}{3} \geq 1 = a_1$$

הנחת האינדוקציה: נניח ש $a_{n+1} \geq a_n$.

שלב ההוכחה: צ"ל ש- $a_{n+2} \geq a_{n+1}$,

$$a_{n+2} = \frac{1}{3}(a_{n+1} + 4) \geq \frac{1}{3}(a_n + 4) = a_{n+1}$$

כאשר המעבר הראשון נובע מהגדרת הסדרה ומהעבר השני נובע מהנחת האינדוקציה.

לכן לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} \geq a_n$.

לסיכום הוכחנו שהסדרה חסומה מלעיל ע"י 2 כמו כן הראנו שהסדרה מונוטונית עולה לכל $n \in \mathbb{N}$, ולכן לפי משפט הסדרה מתכנסת, ולפי חישוב שעשינו קודם $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

ד. הסדרה המוגדרת ע"י $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$, $a_1 = 1$.

הוכחה: ננחש $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

$$L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{6 + a_n} = \sqrt{6 + L}$$

נפתור את המשוואה על L, $L = \sqrt{6+L}$ לכן $L=-2$ או $L=3$, מאחר וכל איברי הסדרה חיוביים נקבל שהגבול האפשרי היחיד הינו $L=3$. כעת נוכיח שהסדרה אכן מתכנסת: נראה כי הסדרה חסומה מלעיל ע"י 3, נראה זאת באינדוקציה על n, כלומר נראה כי לכל $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq 3$

בסיס האינדוקציה: עבור $n=1$, $a_1 = 1 \leq 3$,

הנחת האנדוקציה: $a_n \leq 3$.

שלב ההוכחה: צ"ל ש- $a_{n+1} \leq 3$.

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \leq \sqrt{6+3} = 3$$

המעבר הראשון נובע מהגדרת הסדרה, השלב השני נובע מהנחת האינדוקציה, לכן כל $n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq 3$.

כעת נראה כי הסדרה מונוטונית עולה, שוב נעזר באינדוקציה על n ונראה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} \geq a_n$.

בסיס האינדוקציה : עבור $n=1$,

$$a_2 = \sqrt{6 + a_1} = \sqrt{6+1} = \sqrt{7} \geq 1 = a_1$$

.

הנחת האינדוקציה : $a_n \geq a_{n-1}$

שלב ההוכחה: צ"ל ש- $a_{n+1} \geq a_n$

$$a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \geq \sqrt{6+a_{n-1}} = a_n$$

המעבר הראשון נובע מהגדרת הסדרה, המעבר השני נובע מהנחת האינדוקציה והמעבר האחרון נובע שוב מהגדרת הסדרה.לכן לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $a_{n+1} \geq a_n$. לסיכום הוכחנו שהסדרה חסומה מלעיל ע"י 3 כמו כן הראנו שהסדרה מונוטונית עולה לכל $n \in \mathbb{N}$, ולכן לפי משפט הסדרה מתכנסת , ולפי חישוב שעשינו קודם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$.

3. עבור הסדרות הבאות מצאו את הגבולות החלקיים של הסדרה :

3 א. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left((-1)^n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

פתרון:

אם נתבונן באיברים הזוגיים של הסדרה $a_{2k} = (-1)^{2k} + \frac{1}{2k} = 1 + \frac{1}{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$,

אז רואים מיד כי זוהי תת סדרה המתכנסת לגבול $a = 1$.

באותו האופן, אם נתבונן באיברים האי זוגיים של הסדרה

$a_{2k-1} = (-1)^{2k-1} + \frac{1}{2k-1} = -1 + \frac{1}{2k-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} -1$, נוכל לראות שגם $a = -1$,

היא גבול חלקי של הסדרה המקורית.

אלו הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה, כיוון שמתקיים:

$$\{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{2k-1 \mid k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \quad \wedge \quad \{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \cap \{2k-1 \mid k \in \mathbb{N}\} = \emptyset$$

.

3 ב. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$,

פתרון : לסדרה זו יש חמש תתי סדרות שונות המתכנסות לגבולות שונים , עבור $n = 4k$, $\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sin(k\pi) = 0$, וזוהי תת סדרה המתכנסת לגבול 0, כאשר $n = 8k+1$, $\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{(8k+1)\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ולכן זוהי תת סדרה המתכנסת לגבול $\frac{\sqrt{2}}{2}$. כאשר $n = 8k+2$, $\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{(8k+2)\pi}{4}\right) = 1$, ונקבל תת סדרה שמתכנסת לגבול 1, באופן דומה , עבור $n = 8k+5$, נקבל $\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{(8k+5)\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, נקבל תת סדרה המתכנסת לגבול $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ועבור $n = 8k+6$, נקבל תת סדרה שמתכנסת לגבול 1-.

אלו הגבולות החלקיים היחידים של הסדרה כיוון שמתקיים :

$$\{4k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{8k+1 \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{8k+2 \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{8k+5 \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{8k+6 \mid k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$$

וכמו כן:

$$\{4k \mid k \in \mathbb{N}\} \cap \{8k+1 \mid k \in \mathbb{N}\} \cap \{8k+2 \mid k \in \mathbb{N}\} \cap \{8k+5 \mid k \in \mathbb{N}\} \cap \{8k+6 \mid k \in \mathbb{N}\} = \emptyset$$

4. תהיינה שתי סדרות $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ שתי סדרות נתונות , הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

א. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ ו- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ חסומה אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

תשובה: הטענה נכונה .

הוכחה : נתון ש- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ חסומה ולכן קיים קבוע ממשי $M \geq 0$ כך ש- $|b_n| \leq M$

ומכאן נקבל $0 \leq |a_n b_n| \leq M|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ולכן לפי משפט הסנדוויץ' $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

ב. אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ או $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

תשובה: הטענה לא נכונה.

נפריך ע"י מתן דוגמה נגדית : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0,1,0,1,0,1,\ldots)$ כלומר,

האיברים במקומות האי- זוגיים בסדרה שווים ל-0 והאיברים במקומות הזוגיים

שווים ל-1. כמו כן $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,0,1,0,1,0,\ldots)$ כלומר,

האיברים במקומות האי- זוגיים בסדרה שווים ל-1 והאיברים במקומות הזוגיים

שווים ל-0. אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ אבל שתי הסדרות לא מתכנסות ל-0 , אלא מתבדרות

כיוון שלכל אחת מן הסדרות הללו יש שני גבולות חלקיים : 0,1 (בדקו זאת!).

ג. אם $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת אז, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ו- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסות.
תשובה : הטענה לא נכונה!.
נפריך ע"י מתן דוגמא נגדית, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=(-1)^n$ מתבדרת כיוון שיש לה שני גבולות חלקיים: 1 ו- 1- ,
כמו כן $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}=(-1)^{n+1}$ מתבדרת כיוון שיש לה שני גבולות חלקיים : 1 ו- 1-
אבל $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left((-1)^n+(-1)^{n+1}\right)=(0)$ מתכנסת לאפס.

ד. אם הסדרה $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ חסומה, אזי היא קושי,
תשובה: הטענה אינה נכונה!
נפריך ע"י מתן דוגמא נגדית: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=(-1)^n$ היא סדרה חסומה כיוון שלכל $n\in\mathbb{N}$
מתקיים ש $|a_n|\leq 1$ אך היא אינה סדרת קושי, כיוון שאם היא הייתה סדרת קושי היא הייתה חייבת להתכנס,
אבל הסדרה $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=(-1)^n$ אינה מתכנסת כיוון שיש לה שני גבולות חלקיים: 1 ו- 1- בדקו זאת!)
ולכן היא אינה מתכנסת ועל כן היא לא סדרת קושי.

ה. אם $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\infty$,
תשובה: הטענה לא נכונה.
נפריך ע"י מתן דוגמה נגדית: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=(-n)$ ו- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(-\frac{1}{n}\right)$,
אז : $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{-\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}n^2=\infty$
אבל $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n+\frac{1}{n}\right)=-\infty\neq\infty$

שימו לב!!! אם $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}=\infty$ אזי הטענה ש- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\infty$ כן הייתה נכונה!
הוכחה : $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}b_n\left(\frac{a_n}{b_n}-1\right)$
נתון ש- $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}=\infty\Leftarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$ ולכן עבור $H\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, $\frac{a_H}{b_H}$ הינו מספר אינסופי חיובי ולכן גם $\frac{a_H}{b_H}-1$
אינסופי חיובי, נתון ש- $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}=\infty$ ולכן b_H הינו אינסופי חיובי ולכן
$b_H\left(\frac{a_H}{b_H}-1\right)$ הינו אינסופי חיובי ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}b_n\left(\frac{a_n}{b_n}-1\right)=\infty$.

ו. אם $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\infty$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\infty$.
תשובה: הטענה לא נכונה.
נפריך ע"י דוגמא נגדית: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}=(2n)$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}=(n)$
אז מתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(2n-n)=\lim\limits_{n\to\infty}n=\infty$ אבל , $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n}=2\neq\infty$